انتشارات علمی و فنی

چاپ بیست و چهارم

کتاب سال جمهوری اسلامی ایران

کتاب برگزیده در رشته ریاضی (۱۳۶۲)

اصول آنالیز ریاضی

نوشتهٔ

والتر رودین

ترجمهٔ

دکتر علی اکبر عالم‌زاده

انتشارات علمی و فنی

کتاب برگزیده در رشتهٔ ریاضی (۱۳۶۲)

کتاب سال جمهوری اسلامی ایران

اصول آنالیز ریاضی

نوشتهٔ

والتر رودین

ترجمهٔ

علی اکبر عالم‌زاده

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

پیشگفتار مترجم

کتاب " اصول آنالیز ریاضی " والتر رودین شهرهٔ آفاق است. هر کجا دانشگاهی هست و ریاضیاتی، این کتاب و مؤلف آن مطرحند. اهل فن کتاب را بهترین کتاب آنالیز می‌دانند، و الحق که در این باب نظر صواب دارند.

کتاب عاری از لفاظی است. آنچه در آن است ریاضیات است. مؤلف از سخن پردازیها و توصیفهای ناضرور سخت حذر داشته است. این سبک و سیاق مؤید آن است که بهترین زبان برای بیان ریاضیات در این سطح خود ریاضیات می‌باشد.

کتاب را به مشتاقانش، بویژه آنانی که والاترین ارج را بر آن نهاده‌اند، تقدیم می‌دارم.

علی اکبر عالم‌زاده
گروه ریاضی
دانشگاه تربیت معلم

پیشگفتار مؤلف

ایـن کتاب متنـی است برای درس آنـالیزی که معمولاً " به دانشجویان پیشرفتهٔ دورهٔ لیسانس و یا دانشجویان سال اول فوق لیسانس ریاضی داده می‌شود.

چاپ حـاضر اساساً " همان چاپ دوم است جز اینکه بر آن چیزهایی افزوده شده، در آن حـذفیات مختصری صورت گـرفته، و به نحو قابل ملاحظه‌ای تجدید آرایش یافته است. امیدوارم ایـن تغییرات کتاب را برای شاگردان این درس قابل حصولتر و جذابتر کرده باشند.

تجربه مـرا قانع کرده که شروع درس با ساختن اعداد حقیقی از اعداد گویا (باـ آنکه منطقاً " درست است) از نظر آموزشی صحیح نیست. در آغاز، اغلب شاگردان لزوم این کار را حس نمی‌کنند. از اینروست که دستگاه اعداد حقیقی به عنوان یک میدان مرتب با خاصیت کوچکترین کران بالایی معرفی می‌شود، و بسرعت چند کاربرد جالب این خاصیت عرضـه خواهند شـد. لکن ساختن ددکیند حذف نشده است. در اینجا این ساختن در ضمیمهٔ فصـل ۱ آمده، که هر لحظه اقتضا کرد می‌توان آن را مطالعه نمود و از آن بهره‌ گرفت.

مطالب مربوط به توابع چند متغیره تقـریباً " به طـور کامل، با توضیحات بیشتر، مثالهای افزونتر، و انگیزهٔ زیادتر، بازنویسی شده‌اند. برهان قضیهٔ تابع معکوس ـ مطلب مشکل‌گشای فصل ۹ ـ به وسیلهٔ قضیهٔ نقطهٔ ثابت در بارهٔ نگاشتهای انقباض ساده گشته است. فرمهای دیفرانسیل به طرز مبسوطتری مورد بحث قرار گرفته‌اند. چند کاربرد قضیهٔ

استوکس نیز گنجانده شده‌اند .

و اما تغییرات دیگر ، فصل مربوط به انتگرال ریمان ـ اشتیل یس زینت مختصری یافته ، بخش کوتاه تمرین مانندی در باب تابع گاما به فصل ۸ افزوده شده ، و تعداد زیادی تمرین جدید آمده که برای اکثر آنها راهنماییهای نسبتاً " مبسوطی شده است .

همچنین ، به چند مقاله که در *American Mathematical Monthly* و *Mathematics Magazine* آمده‌اند اشاره کرده‌ام ، به‌این‌امید که خوی مراجعه به مجلات را در دانشجویان تقویت کرده باشم . اکثر این مآخذ را بورکل (R. B. Burckel)لطف کرده تهیه نموده است .

در طی سالها ، افراد بسیاری ، چه دانشجو چه استاد ، اصلاحات ، انتقادات ، و نظرات دیگر را در ارتباط با چاپهای قبلی کتاب برای من فرستاده‌اند . اینها را ارج نهاده‌ام ، و فرصت را غنیمت دانسته مراتب امتنان خالصانهٔ خود را نسبت به همهٔ افرادی که نامه نوشته‌اند ابراز می‌دارم .

والتر رودین

فهرست مطالب

۱

دستگاههای اعداد حقیقی و مختلط

مقدمه

هر بحث رضایتبخشی از مفاهیم اساسی آنالیز (نظیر همگرایی ، پیوستگی ، مشتقگیری و انتگرالگیری) باید بر مفهوم عدد که بدقت تعریف شده است ، بنا شود. با این‌حال ، ما در هیچ بحثی از اصول موضوع حساب اعداد صحیح وارد نمی‌شویم ، و نیز فرض می‌کنیم خواننده با اعداد گویا (یعنی ، اعدادی به شکل m/n که در آن m و n صحیح هستند و $n \neq 0$) آشنا باشد .

دستگاه اعداد گویا ، خواه به شکل یک میدان و خواه به صورت مجموعه‌ای مرتب ، برای بسیاری از اهداف نارساست . (این اصطلاحات در بخشهای ۱۰۶ و ۱۰۱۲ تعریف خواهند شد .) مثلا" ، عدد گویایی چون p نیست که $p^2 = 2$. (این مطلب را بزودی ثابت‌خواهیم کرد .) این وضع به معرفی "اعداد به‌اصطلاح گنگ "منجر می‌شود ، که اغلب به صورت بسطهای اعشاری نامتناهی نوشته و به وسیلهٔ بسطهای اعشاری متناهی مربوط به خود "تقریب" می‌شوند . مثلا" ، دنبالهٔ

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots$$

" به $\sqrt{2}$ میل می‌کند . " اما ، تا وقتی عدد گنگ $\sqrt{2}$ بوضوح تعریف نشده ، باید این سوءال مطرح باشد که "آن چیست که این دنباله به آن می‌گراید ؟ "

به این نوع سوءال‌می‌توان‌به محض ساخته شدن "دستگاه اعداد حقیقی " پاسخ گفت .

۱۰۱ مثال . حال نشان می‌دهیم که معادلهٔ

$$p^2 = 2 \tag{1}$$

به ازای هیچ p ی گویا صادق نیست. گوییم اگر چنین p ای وجود می‌داشت، می‌شد بنویسیم $p = m/n$ که در آن m و n صحیح بوده و هر دو زوج نباشند. فرض کنیم چنین شده باشد. در این صورت، (۱) ایجاب خواهد کرد که

$$m^2 = 2n^2. \tag{2}$$

این نشان می‌دهد که m^2 زوج است. پس m زوج است (چه اگر m فرد می‌بود، m^2 فرد می‌شد)، و لذا m^2 بر 4 بخشپذیر می‌باشد. از این نتیجه‌می‌شود که سمت راست (۲) بر 4 بخشپذیر است. درنتیجه، n^2 زوج می‌باشد، که زوج بودن n را ایجاب می‌نماید.

بدین ترتیب، فرض برقراری (۱) به زوج بودن هم m و هم n منجر می‌شود، که با انتخاب ما از m و n مغایر است. بنابر این، (۱) به ازای p های گویا ناممکن می‌باشد.

حال این وضع را کمی دقیقتر بررسی می‌کنیم. فرض کنیم A مجموعهٔ تمام اعداد گویای مثبت p باشد که $p^2 < 2$، و B از کلیهٔ اعداد گویای مثبت p که $p^2 > 2$ تشکیل شده باشد. نشان می‌دهیم که A **حاوی بزرگترین عدد و B شامل کوچکترین عدد نیست.**

صریحتر بگوییم، به ازای هر p در A می‌توان عدد گویای q در A را طوری یافت که $p < q$ و، برای هر p در B، می‌شود عدد گویای q در B را قسمی یافت که $q < p$.

بدین منظور، به هر عدد گویای $p > 0$ عدد

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2} \tag{3}$$

را مربوط می‌کنیم. در این صورت،

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2}. \tag{4}$$

گوییم هرگاه p در A باشد، $p^2 - 2 < 0$؛ (۳) نشان می‌دهد که $q > p$؛ و (۴) مبین آن است که $q^2 < 2$. پس، q در A می‌باشد.

هرگاه p در B باشد، $p^2 - 2 > 0$؛ (۳) نشان می‌دهد که $0 < q < p$؛ و (۴) بیانگر آن است که $q^2 > 2$. بنابر این، q در B خواهد بود.

۲.۱ تبصره. هدف از بحث بالا این بود که نشان دهیم دستگاه اعداد گویا، علیرغم اینکه بین هر دو عدد گویا عدد گویای دیگری هست (هرگاه $r < s$، آنگاه $r < (r + s)/2 < s$)، رخنه دارد. دستگاه اعداد حقیقی این رخنه‌ها را پر خواهد کرد. این گواه اصلی است دال بر نقش اساسیی که دستگاه اخیر در آنالیز ایفا می‌کند.

برای توضیح نهاد این دستگاه، و نیز نهاد دستگاه اعداد مختلط، مطلب را با بحث کوتاهی در باب مفاهیم کلی **مجموعهٔ مرتب** و **میدان** آغاز می‌کنیم.

ابتدا چند اصطلاح متعارف نظریهٔ مجموعه‌ها را که در سراسر این کتاب به کار خواهند رفت ذکر می‌نماییم.

۳۰۱ **چند تعریف.** هرگاه A یک مجموعه باشد (عنصرهایش ممکن است عدد باشند و یا چیزهایی دیگر)، می‌نویسیم $x \in A$ تا نشان دهیم x یک **عضو** (یا یک **عنصر**) A است. چنانچه x عضو A نباشد، خواهیم نوشت $x \notin A$.

مجموعه‌ای که شامل هیچ عنصر نیست **مجموعهٔ تهی** نام دارد. اگر مجموعه‌ای دست کم یک عنصر داشته باشد، **ناتهی** خوانده می‌شود.

هرگاه A و B مجموعه‌هایی باشند و هر عنصر A یک عنصر B باشد، می‌گوییم A یک **زیرمجموعهٔ** B است و می‌نویسیم $A \subset B$ یا $B \supset A$. هرگاه، علاوه بر این، عنصری از B باشد که در A نباشد، A را یک زیرمجموعهٔ **حقیقی** B خواهیم گفت. توجه دارید که به ازای هر مجموعه مانند A، $A \subset A$.

هرگاه $A \subset B$ و $B \subset A$، می‌نویسیم $A = B$. در غیر این صورت، خواهیم نوشت $A \neq B$.

۴۰۱ **تعریف.** در سراسر فصل ۱، مجموعهٔ تمام اعداد گویا با Q نشان داده می‌شود.

مجموعه های مرتب

۵۰۱ **تعریف.** فرض کنیم S یک مجموعه باشد. یک **ترتیب** بر S رابطه‌ای است که با $>$ نموده می‌شود و از دو خاصیت زیر برخوردار است:

(یک) هرگاه $x \in S$ و $y \in S$، آنگاه یکی و فقط یکی از گزاره‌های

$$x < y, \qquad x = y, \qquad y < x$$

راست است؛

(دو) هرگاه $x, y, z \in S$، $x < y$، و $y < z$، آنگاه $x < z$.

عبارت "$x < y$" را می‌توان این طور خواند: "x کمتر از y است"، یا "x کوچکتر از y است"، و یا "x پیش از y است".

اغلب شایسته است به جای $x < y$ بنویسیم $y > x$.

نماد $x \leq y$ حاکی از آن است که $x < y$ یا $x = y$، بی آنکه تصریح کند کدام یک از

این دو برقرار است . به عبارت دیگر ، $y \leq x$ نقیض $x > y$ می باشد .

۶۰۱ تعریف . یک **مجموعهٔ مرتب** مجموعه‌ای است مانند S که در آن ترتیبی مقرر شده باشد .

مثلا" ، در Q ، اگر $r < s$ به این معنی تعریف شود که $s - r$ عدد گویای مثبتی است ، Q مجموعه‌ای مرتب خواهد بود .

۷۰۱ تعریف . فرض کنیم S یک مجموعهٔ مرتب باشد و $E \subset S$. هرگاه عنصری مانند $\beta \in S$ باشد بطوری که به ازای هر $x \in E$ ، $x \leq \beta$ ، می‌گوییم E ***از بالا کراندار*** است ، و β را یک ***کران بالایی*** E می‌نامیم .

کرانهای پایینی به همین نحو (با $\geq$ به جای $\leq$) تعریف می‌شوند .

۸۰۱ تعریف . فرض کنیم S مجموعه‌ای باشد مرتب ، $E \subset S$ ، و E از بالا کراندار باشد . همچنین ، عنصری مانند $\alpha \in S$ با خواص زیر وجود داشته باشد :

(یک) α یک کران بالایی E باشد ؛

(دو) هرگاه $\gamma < \alpha$ ، آنگاه γ یک کران بالایی E نباشد .

در این صورت ، α را ***کوچکترین کران بالایی*** E [اینکه از این α ها حداکثر یکی وجود دارد از (دو) واضح است] یا **سوپرمم** E می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\alpha = \sup E.$$

بزرگترین کران پایینی ، یا ***اینفیمم*** ، مجموعهٔ E که از پایین کراندار است به همین نحو تعریف می‌شود : عبارت

$$\alpha = \inf E$$

یعنی α یک کران پایینی E است و هیچ β با شرط $\beta > \alpha$ یک کران پایینی E نمی‌باشد .

۹۰۱ چند مثال

(آ) مجموعه‌های A و B مثال ۱۰۱ را به عنوان زیر مجموعه‌های مجموعهٔ مرتب Q در نظر می‌گیریم . مجموعهٔ A از بالا کراندار است . درواقع ، کرانهای بالایی A دقیقا" اعضای B هستند . چون B شامل کوچکترین عضو نیست ، A **در Q کوچکترین کران بالایی ندارد** .

بهمین نحو، B از پایین‌کراندار است. مجموعهٔ تمام کرانهای پایینی B از اعضای A وکلیهٔ $r \in Q$ هایی که $r \leq 0$ تشکیل شده است. از آنجا که A بزرگترین عضو ندارد، B در Q بزرگترین کران پایینی نخواهد داشت.

(ب) در صورت وجود $\alpha = \sup E$، این امکان‌که αعضو E باشد یا نه هست. به عنوان مثال، فرض می‌کنیم E_1 مجموعهٔ‌تمام $r \in Q$ هایی باشد که $r < 0$، و E_2 را مجموعهٔ تمام $r \in Q$ هایی می‌انگاریم که $r \leq 0$. در این صورت،

$$\sup E_1 = \sup E_2 = 0,$$

و $0 \notin E_1$ ولی $0 \in E_2$.

(پ) فرض کنیم E از تمام اعداد $1/n$ که در آنها $n = 1, 2, 3, \ldots$ تشکیل شده باشد. دراین‌صورت، $\sup E = 1$ که‌در E است، و $\inf E = 0$، که در E نیست.

۱۰۰۱ تعریف. می‌گوییم مجموعهٔ مرتب S *خاصیت کوچکترین کران بالایی* دارد اگر که مطلب زیر درست باشد:

هرگاه $E \subset S$، Eتهی نباشد، و E از بالا کراندار باشد، آنگاه $\sup E$ در S وجود داشته باشد.

مثال ۹۰۱ (آ) نشان می‌دهد که Q از خاصیت کوچکترین کران بالایی برخوردار نیست.

حال‌نشان می‌دهیم که میان بزرگترین کرانهای پایینی و کوچکترین کرانهای بالایی رابطه‌ای نزدیک وجود دارد، و هر مجموعهٔ مرتب با خاصیت کوچکترین کران بالایی از خاصیت بزرگترین کران پایینی نیز بهره‌مند است.

۱۱۰۱ قضیه. *فرض‌کنیم S مجموعه‌ای باشد مرتب با خاصیت کوچکترین کران بالایی، $B \subset S$، B تهی نباشد، و B از پایین کراندار باشد. همچنین، L را مجموعهٔ تمام‌کرانهای پایینی B می‌انگاریم. در این صورت،*

$$\alpha = \sup L$$

در S موجود است و $\alpha = \inf B$.

بخصوص، $\inf B$ در S وجود دارد.

برهان. چون B از پایین کراندار است، پس L تهی نیست. و چون L درست از y هایی در S تشکیل‌شده‌که درنامساوی $y \leq x$ به ازای‌هر $x \in B$ صدق می‌کنند، می‌بینیم

که هر $x \in B$ یک *کران بالایی* L *می‌باشد*. ازاینـــرو، L از بالا کراندار است. بنابراین، فرض مـا در بـــاب S ایجاب می‌کند که L در S سوپـــرمم داشته‌باشد. این سوپرمم را α می‌نامیم.

هرگاه $\gamma < \alpha$، آنگاه (ر.ک. تعـــریف ۱.۸) γ یک کران بالایی L نیست. پس $\gamma \notin B$. از این نتیجه می‌شود که به ازای هر $x \in B$، $\alpha \le x$. بنابراین، $\alpha \in L$.

هرگاه $\alpha < \beta$، آنگاه $\beta \notin L$، چرا که α یک کران بالایی L است.

یعنی، نشان‌داده‌ایم که $\alpha \in L$ ولی، اگر $\beta > \alpha$، $\beta \notin L$. به عبارت دیگر، α یک کران‌پایینی B است ولی β، در صورتی که $\beta > \alpha$، این وضع را ندارد. این بدان معنی است که $\alpha = \inf B$.

میدانها

۱.۱۲ **تعریف**. یک *میدان* مجموعه‌ای‌است مانند F با دو عمل، به نامهای **جمع** و **ضرب**، که در "اصول موضوع میدان" (ج)، (ض)، و (پ) زیر صدق می‌کنند:

(ج) **اصول موضوع جمع**

(ج ۱) هر گاه $x \in F$ و $y \in F$، آنگاه مجموع آنها $x + y$ در F است.

(ج ۲) جمع تعویضپذیر است: به ازای هر $x, y \in F$، $x + y = y + x$.

(ج ۳) جمع شرکتپذیر است: به‌ازای‌هر $x, y, z \in F$ $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(ج ۴) F حاوی‌عنصری‌است مانند 0 بطوری‌که به ازای‌هر $x \in F$، $0 + x = x$.

(ج ۵) به هر $x \in F$ عنصری مانند $-x \in F$ مربوط‌است بقسمی که

$$x + (-x) = 0.$$

(ض) **اصول موضوع ضرب**

(ض ۱) هرگاه $x \in F$ و $y \in F$، آنگاه حاصل ضرب آنها xy در F است.

(ض ۲) ضرب تعویضپذیر است: به ازای هر $x, y \in F$ $xy = yx$.

(ض ۳) ضرب شرکتپذیر است: به ازای‌هر $x, y, z \in F$، $(xy)z = x(yz)$.

(ض ۴) F شامل عنصری است چون $1 \neq 0$ بقسمی که به‌ازای‌هر $x \in F$، $1x = x$.

(ض ۵) هرگاه $x \in F$ و $x \neq 0$، آنـــگاه عنصـــری مثل $1/x \in F$ هست بطوری که

$$x \cdot (1/x) = 1.$$

(پ) قانون پخشپذیری
رابطهٔ

$$x(y+z) = xy + xz$$

به ازای هر $x, y, z \in F$ برقرار است.

۱۳۰۱ چند تبصره

(آ) معمولاً (در هر میدان) به جای

$$x+(-y),\ x\cdot\left(\frac{1}{y}\right),\ (x+y)+z,\ (xy)z,\ xx,\ xxx,\ x+x,\ x+x+x,\ \ldots.$$

می‌نویسند

$$x-y,\ \frac{x}{y},\ x+y+z,\ xyz,\ x^2,\ x^3,\ 2x,\ 3x,\ \ldots.$$

(ب) هرگاه در Q، یعنی مجموعهٔ تمام اعداد گویا، جمع و ضرب معنی عادی‌خود را داشته باشند، اصول موضوع میدان بوضوح در آن برقرارند. لذا، Q یک میدان می‌باشد.

(پ) با آنکه قصد ما این نیست که میدانها (و یا نهادهای جبری دیگر) را مشروح بررسی کنیم، ولی اثبات اینکه بعضی از خواص آشنای Q نتایج اصول موضوع میدان‌هستند سودمند است. یک بار که این کار صورت گرفت، نیازی به تکرار آن برای اعداد حقیقی و اعداد مختلط نخواهیم داشت.

۱۴۰۱ حکم. *اصول موضوع جمع گزاره‌های زیر را ایجاب می‌کنند:*

(آ) *هرگاه* $x+y=x+z$*، آنگاه* $y=z$؛

(ب) *هرگاه* $x+y=x$*، آنگاه* $y=0$؛

(پ) *هرگاه* $x+y=0$*، آنگاه* $y=-x$؛

(ت) $-(-x)=x$.

گزارهٔ (آ) یک قانون حذف است. توجه کنید که (ب) یکتایی عنصری را که‌وجودش در (ج ۴) فرض شده ثابت می‌کند، و (پ) همین کار را در مورد (ج ۵) خواهد کرد.

برهان. هرگاه $x+y=x+z$، اصول موضوع (ج) نتیجه می‌دهند که

$$\begin{aligned} y &= 0+y = (-x+x)+y = -x+(x+y) \\ &= -x+(x+z) = (-x+x)+z = 0+z = z. \end{aligned}$$

این (آ) را ثابت می‌کند . با فرض $z=0$ در (آ) حکم (ب) به دست می‌آید . و با اختیار $z=-x$ در (آ) حکم (پ) حاصل می‌شود . چون $-x+x=0$، (پ) (با $-x$ به جای x) حکم (ت) را نتیجه خواهد داد .

۱۵۰۱ حکم . *اصول موضوع ضرب گزاره‌های زیر را ایجاب می‌کنند* :

(آ) هرگاه $x \neq 0$ و $xy = xz$ ، آنگاه $y = z$ ؛

(ب) هرگاه $x \neq 0$ و $xy = x$ ، آنگاه $y = 1$ ؛

(پ) هرگاه $x \neq 0$ و $xy = 1$ ، آنگاه $y = 1/x$ ؛

(ت) هرگاه $x \neq 0$ ، آنگاه $1/(1/x) = x$.

برهان این حکم را چون خیلی شبیه برهان حکم ۱۴۰۱ است حذف می‌کنیم .

۱۶۰۱ حکم . *اصول موضوع میدان گزاره‌های زیر را به ازای هر $x, y, z \in F$ نتیجه می‌دهند* :

(آ) $0x = 0$ ؛

(ب) هرگاه $x \neq 0$ و $y \neq 0$، آنگاه $xy \neq 0$ ؛

(پ) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$ ؛

(ت) $(-x)(-y) = xy$.

برهان . $0x + 0x = (0+0)x = 0x$. پس ۱۴۰۱ (ب) ایجاب می‌کند که $0x = 0$ ، و (آ) برقرار است .

حال فرض می‌کنیم $x \neq 0, y \neq 0$ ولی $xy = 0$. در این صورت ، (آ) این طور نتیجه می‌دهد :

$$1 = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)xy = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)0 = 0,$$

که یک تناقض است . پس (ب) برقرار می‌باشد .

اولین تساوی در (پ) از تلفیق

$$(-x)y + xy = (-x+x)y = 0y = 0$$

با ۱۴۰۱ (پ) به دست می‌آید . نیمهٔ دیگر (پ) به همین نحو ثابت خواهد شد .

بالاخره، بنابر (پ) و ۱۴۰۱ (ت) ،

$$(-x)(-y) = -[x(-y)] = -[-(xy)] = xy \cdot$$

۱۷۰۱ **تعریف**. یک **میدان مرتب** میدانی است مانند F که یک **مجموعهٔ مرتب** نیز هست، و چنان است که

(یک) اگر $x, y, z \in F$ و $y < z$ داریم $x + y < x + z$، و

(دو) اگر $x \in F, y \in F$، $x > 0$، و $y > 0$، خواهیم داشت $xy > 0$.

هرگاه $x > 0$، x را مثبت می‌گوییم؛ چنانچه $x < 0$، آن را منفی خواهیم نامید.

به عنوان مثال، Q، یک میدان مرتب می‌باشد.

تمام قواعد آشنای کار با نامساویها در هر میدان مرتب قابل اجرا هستند: ضرب در مقادیر مثبت (منفی) جهت نامساویها را حفظ می‌کند (بر می‌گرداند)؛ هیچ مربعی منفی نیست؛ و از این قبیل. در حکم زیر بعضی از این قاعده‌ها ذکر شده‌اند.

۱۸۰۱ **حکم. گزاره‌های زیر در هر میدان مرتب راست اند:**

(آ) هرگاه $x > 0$، آنگاه $-x < 0$، و بالعکس؛

(ب) هرگاه $x > 0$ و $y < z$، آنگاه $xy < xz$؛

(پ) هرگاه $x < 0$ و $y < z$، آنگاه $xy > xz$؛

(ت) هرگاه $x \neq 0$، آنگاه $x^2 > 0$؛ بویژه، $1 > 0$؛

(ث) هرگاه $0 < x < y$، آنگاه $0 < 1/y < 1/x$.

برهان

(آ) هرگاه $x > 0$، آنگاه $0 = -x + x > -x + 0$، پس $-x < 0$. هرگاه $x < 0$، آنگاه $0 = -x + x < -x + 0$، درنتیجه، $-x > 0$. این استدلال (آ) را ثابت می‌کند.

(ب) چون $z > y$، داریم $z - y > y - y = 0$، پس $x(z - y) > 0$، لذا،

$$xz = x(z - y) + xy > 0 + xy = xy.$$

(پ) بنابر (آ)، (ب)، و حکم ۱۶۰۱ (پ)

$$-[x(z - y)] = (-x)(z - y) > 0.$$

پس $x(z - y) < 0$، درنتیجه، $xz < xy$.

(ت) هرگاه $x > 0$، قسمت (دو) تعریف ۱۷۰۱ نتیجه می‌دهد که $x^2 > 0$. چنانچه $x < 0$، $-x > 0$، ازاینرو، $(-x)^2 > 0$. اما، بنابرحکم ۱۶۰۱ (ت)، $x^2 = (-x)^2$.

چون $1 = 1^2$ ، پس $1 > 0$.

(ث) هرگاه $0 < y$ و $0 \leq v$ ، آنگاه $yv \leq 0$. اما ، $y \cdot (1/y) = 1 > 0$. بنا بر-این ، $1/y > 0$. بهمین‌نحو ، $1/x > 0$. اگردوطرف نامساوی $x < y$ را در مقدارمثبت $(1/x)(1/y)$ ضرب کنیم ، خواهیم داشت $1/y < 1/x$.

میدان حقیقی

حال قضیهٔ وجودی را که قلب و اساس این فصل است بیان می‌داریم .

۱۹۰۱ قضیه . *یک میدان مرتب مانند R هست که خاصیت کوچکترین کران بالایی دارد . بعلاوه ، R ، Q را به عنوان یک زیرمیدان در برخواهد داشت .*

حکم دوم به این معنی است که $Q \subset R$ و اعمال جمع و ضرب در R ، وقتی درمورد اعضای Q به کار می‌روند ، با اعمال معمولی اعداد گویا یکی می‌شوند . همچنین ، اعداد گویای مثبت عنصرهای مثبتی از R می‌باشند .

اعضای R را ***اعداد حقیقی*** نام داده‌اند .

برهان قضیهٔ ۱۹۰۱ نسبتاً " طولانی و کمی خسته کننده است ، و ازاینروست که آن را در ضمیمهٔ فصل یک آورده‌ایم . در این برهان ، R عملاً " از Q ساخته می شود .

از این ساختن می‌شد قضیهٔ بعدی‌را با اندکی تلاش به‌دست آورد . لکن ما ترجیح دادیم آن را از قضیهٔ ۱۹۰۱ نتیجه بگیریم ، زیرا این کار تصویر روشنی از آنچه شخص می‌تواند با خاصیت کوچکترین کران بالایی بکند به دست خواهد داد .

۲۰۰۱ قضیه

(آ) هرگاه $x \in R, y \in R$ ، و $x > 0$ ، آنگاه عدد صحیح مثبتی مانند n هست بطوری که

$$nx > y.$$

(ب) هرگاه $x \in R, y \in R$ ، و $x < y$ ، آنگاه عددی مانند $p \in Q$ هست بقسمی که

$$x < p < y .$$

قسمت (آ) را معمولاً " ***خاصیت ارشمیدسی*** R می‌نامند . قسمت (ب) را می‌توان این طور گفت که Q در R ***چگال*** است : بین هر دو عدد حقیقی عدد گویایی وجود دارد .

برهان

(آ) فرض کنیم A مجموعهٔ تمام nx هایی باشدکه درآنها n اعداد صحیح مثبت را می‌گیرد. گوییم هرگاه (آ) غلط می‌بود، y یک کران بالایی A می‌شد. اما، در این حال، A در R **کوچکترین** کران بالایی خواهد داشت. قرار می‌دهیم $\alpha = \sup A$. چون $x > 0$ ، پس $\alpha - x < \alpha$ و $\alpha - x$ یک کران بالایی A نیست. ازاینرو، به ازای عدد صحیح مثبتی چون m ، $\alpha - x < mx$. اما، دراین صورت، $\alpha < (m+1)x \in A$ که ناممکن است، زیرا α یک کران بالایی A می‌باشد.

(ب) چون $x < y$ ، داریم $y - x > 0$، و (آ) عدد صحیح و مثبت n را با این خاصیت که

$$n(y - x) > 1$$

به ما می‌دهد. مجدداً (آ) را به کار برده اعداد صحیح و مثبت m_1 و m_2 را که $m_1 > nx$ و $m_2 > -nx$ به دست می‌آوریم. در این صورت،

$$-m_2 < nx < m_1.$$

پس عدد صحیحی مانند m (با شرط $-m_2 \leq m \leq m_1$) هست بطوری که

$$m - 1 \leq nx < m.$$

اگر این نامساویها را با هم تلفیق کنیم، خواهیم داشت

$$nx < m \leq 1 + nx < ny.$$

چون $n > 0$ ، نتیجه می‌شود که

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

این، با فرض $p = m/n$ ، (ب) را ثابت خواهد کرد.

حال وجود ریشه‌های n ام اعداد حقیقی مثبت را ثابت می‌کنیم. این برهان نشان خواهد داد که چگونه می‌توان در R بر مشکلی که در مقدمه ذکر شد (گنگ بودن $\sqrt{2}$) فائق آمد.

۲۱۰۱ قضیه. به ازای هر عدد حقیقی $x > 0$ و هر عدد صحیح $n > 0$ **یک و فقط یک** y **حقیقی هست که** $y^n = x$.

این y به صورت $\sqrt[n]{x}$ یا $x^{1/n}$ نوشته می‌شود.

برهان. اینکه ازاین y هاحداکثر یکی وجود دارد واضح است، زیرا $0 < y_1 < y_2$ ایجاب

خواهد کرد که $y_1^n < y_2^n$.

فرض کنیم E مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی و مثبت t که $t^n < x$ باشد. گوییم هرگاه $t = x/(1+x)$ ، آنگاه $0 < t < 1$ ، پس $t^n < t < x$. لذا، $t \in E$ و E تهی نیست. هرگاه $t > 1 + x$ ، آنگاه $t^n > t > x$. درنتیجه، $t \notin E$. لذا، $1 + x$ یک کران بالایی E می‌باشد. بنابراین، قضیهٔ ۱۹۰۱ وجود

$$y = \sup E$$

را ایجاب خواهد کرد.

برای اثبات $y^n = x$ نشان می‌دهیم که هر یک از نامساویهای $y^n < x$ و $y^n > x$ به تناقض منجر می‌شود.

ابتدا می‌بینیم که اتحاد $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$ وقتی $0 < a < b$ نامساوی

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$$

را نتیجه می‌دهد.

حال فرض می‌کنیم $y^n < x$. h را طوری می‌گیریم که $0 < h < 1$ و

$$h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}.$$

قرار می‌دهیم $a = y, b = y + h$. در این صورت،

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < x - y^n.$$

لذا، $(y+h)^n < x$ ، و $y + h \in E$. چون $y + h > y$، این با کران بالایی E بودن y متناقض می‌باشد.

فرض کنیم $y^n > x$. قرار می‌دهیم

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}.$$

در این صورت، $0 < k < y$. هرگاه $t \geq y - k$، نتیجه می‌گیریم که

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n < kny^{n-1} = y^n - x.$$

پس $t^n > x$ ، و $t \notin E$. از اینجا نتیجه می‌شود که $y - k$ یک کران بالایی E است. اما $y - k < y$، که با کوچکترین کران بالایی E بودن y تعارض دارد.

بنابر این، $y^n = x$ ، و برهان تمام خواهد بود.

نتیجه. هرگاه a و b حقیقی و مثبت باشند و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}.$$

برهان. قرار می‌دهیم $\alpha = a^{1/n}, \beta = b^{1/n}$. در این صورت، چون ضرب‌تعویض‌پذیر است [اصل موضوع (ض ۲) در تعریف ۱۲۰۱]،

$$ab = \alpha^n\beta^n = (\alpha\beta)^n.$$

لذا، یکتایی ریشه که در قضیهٔ ۲۱۰۱ ثابت شد نشان می‌دهد که

$$(ab)^{1/n} = \alpha\beta = a^{1/n}b^{1/n}.$$

۲۲۰۱ **اعداد اعشاری.** این بخش را با اشاره‌ای به رابطهٔ بین اعداد حقیقی و اعداد اعشاری خاتمه می‌دهیم.

فرض کنیم x حقیقی و مثبت باشد، n_0 را بزرگترین عدد صحیحی می‌انگاریم که $n_0 \leq x$ (توجه دارید که وجود n_0 به خاصیت ارشمیدسی R وابسته است.) با فرض اختیار شدن $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$، n_k را بزرگترین عدد صحیحی می‌گیریم که

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \leq x.$$

فرض کنیم E مجموعهٔ اعداد به صورت

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

باشد. در این صورت، $x = \sup E$. بسط اعشاری x عبارت خواهدبود از

$$n_0 \cdot n_1 n_2 n_3 \cdots \tag{6}$$

بعکس، به‌ازای هر عدد اعشاری‌و نامتناهی (۶)، مجموعهٔ E مرکب از اعداد (۵) از بالا کراندار است، و (۶) بسط اعشاری $\sup E$ می‌باشد.

چون ما هرگز از اعشاریها استفاده نمی‌کنیم، وارد بحث تفصیلی آنها نخواهیم شد.

دستگاه وسعت یافتهٔ اعداد حقیقی

۲۳۰۱ **تعریف.** دستگاه وسعت یافتهٔ *اعداد حقیقی* عبارت است از میدان حقیقی R و دو علامت $+\infty$ و $-\infty$. ما ترتیب اصلی R را حفظ و به ازای هر $x \in R$ تعریف

می‌کنیم

$$-\infty < x < +\infty.$$

در این صورت، واضح است که $+\infty$ یک کران بالایی هر زیرمجموعه از دستگاه وسعت یافتهٔ اعداد حقیقی است، و هر زیرمجموعهٔ ناتهی کوچکترین کران بالایی دارد. هرگاه، مثلاً، E یک مجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی باشد که در R از بالا کراندار نباشد، آنگاه، در دستگاه وسعت یافتهٔ اعداد حقیقی، $\sup E = +\infty$.

همین نکات عیناً در مورد کرانهای پایینی قابل ذکرانند.

دستگاه وسعت یافتهٔ اعداد حقیقی میدان تشکیل نمی‌دهد، اما معمولاً در آن قراردادهای زیر را می‌پذیرند:

(آ) هرگاه x حقیقی باشد، آنگاه

$$x + \infty = +\infty, \qquad x - \infty = -\infty, \qquad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0;$$

(ب) هرگاه $x > 0$، آنگاه $x \cdot (+\infty) = +\infty$ و $x \cdot (-\infty) = -\infty$؛

(پ) هرگاه $x < 0$، آنگاه $x \cdot (+\infty) = -\infty$ و $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

وقتی بخواهیم میان اعداد حقیقی از یک سو و علامات $+\infty$ و $-\infty$ از سوی دیگر فرق بگذاریم، اعداد حقیقی را **متناهی** خواهیم نامید.

میدان مختلط

۲۴۰۱ **تعریف.** هر عدد مختلط جفت مرتبی است از اعداد حقیقی مانند (a, b). "مرتب" یعنی، هرگاه $a \neq b$، (a, b) و (b, a) متمایز گرفته می‌شوند.

فرض کنیم $x = (a, b), y = (c, d)$ دو عدد مختلط باشند. می‌نویسیم $x = y$ اگر و فقط اگر $a = c$ و $b = d$. (توجه کنید که این تعریف بکلی بی‌ارزش نیست؛ تساوی اعداد گویا را که به صورت خارج قسمتهای اعداد صحیح نموده شده‌اند در نظر بیاورید.) تعریف می‌کنیم

$$x + y = (a + c, b + d),$$
$$xy = (ac - bd, ad + bc).$$

۲۵۰۱ **قضیه.** *این تعریفهای جمع و ضرب، مجموعهٔ تمام اعداد مختلط را به یک میدان بدل می‌کنند، که در آن $(0, 0)$ و $(1, 0)$ در نقش 0 و 1 ظاهر می‌شوند.*

برهان. اصول موضوع میدان را، بصورتی که در تعریف ۱۲۰۱ آمده، تحقیق می‌کنیم. (البته، از میدان بودن R سود خواهیم جست.)

فرض کنیم $x = (a, b), y = (c, d), z = (e, f)$.

(ج ۱) واضح است.

(ج ۲) $x + y = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = y + x$،

(ج ۳)
$$\begin{aligned}(x + y) + z &= (a + c, b + d) + (e, f)\\ &= (a + c + e, b + d + f)\\ &= (a, b) + (c + e, d + f) = x + (y + z).\end{aligned}$$

(ج ۴) $x + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a, b) = x$.

(ج ۵) قرار می‌دهیم $-x = (-a, -b)$. در این صورت، $x + (-x) = (0, 0) = 0$.

(ض ۱) واضح است.

(ض ۲) $xy = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = yx$،

(ض ۳)
$$\begin{aligned}(xy)z &= (ac - bd, ad + bc)(e, f)\\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)\\ &= (a, b)(ce - df, cf + de) = x(yz).\end{aligned}$$

(ض ۴) $1x = (1, 0)(a, b) = (a, b) = x$.

(ض ۵) هرگاه $x \neq 0$، آنگاه $(a, b) \neq (0, 0)$، که به این معنی است که دست کم یکی از اعداد حقیقی a, b مخالف 0 است. لذا، بنابر حکم ۱۸۰۱ (ت)، $a^2 + b^2 > 0$، و می‌توانیم تعریف کنیم

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

در این صورت،

$$x \cdot \frac{1}{x} = (a, b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0) = 1.$$

(پ)
$$\begin{aligned}x(y + z) &= (a, b)(c + e, d + f)\\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be)\\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be)\\ &= xy + xz.\end{aligned}$$

۲۶۰۱ قضیه. به‌ازای هر دو عدد حقیقی a و b داریم

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \qquad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0).$$

اثبات بدیهی است.

قضیهٔ ۲۶۰۱ نشان می‌دهد که اعداد مختلط به شکل $(a, 0)$ همان خواص حسابی a های حقیقی نظیرشان‌را دارند. ازاینروست که‌می‌توانیم $(a, 0)$ را بر a منطبق‌کنیم. این انطباق میدان حقیقی را به صورت زیرمیدانی از میدان مختلط به ما می‌دهد.

خواننده احتمالا" متوجه شده است که ما اعداد مختلط‌را بی‌توسل به جذر مبهم -1 تعریف کرده‌ایم. حال نشان می‌دهیم که نماد (a, b) با نماد متداولتر $a + bi$ معادل است.

۲۷۰۱ تعریف. $i = (0, 1)$.

۲۸۰۱ قضیه. $i^2 = -1$.

برهان. $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

۲۹۰۱ قضیه. هرگاه a و b حقیقی باشند، آنگاه $(a, b) = a + bi$.

برهان

$$\begin{aligned} a + bi &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \\ &= (a, 0) + (0, b) = (a, b). \end{aligned}$$

۳۰۰۱ تعریف. هرگاه a, b حقیقی باشند و $z = a + bi$، آنگاه عدد مختلط $\bar{z} = a - bi$ مزدوج z نام دارد. اعداد a و b بترتیب قسمت حقیقی و قسمت موهومی z می‌باشند.

گاهی اوقات خواهیم نوشت

$$a = \mathrm{Re}(z), \qquad b = \mathrm{Im}(z).$$

۳۱۰۱ قضیه. هرگاه z و w مختلط باشند، آنگاه

(آ) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$،

(ب) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ؛
(پ) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z),\ z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ ؛
(ت) $z\bar{z}$ (جز وقتی $z = 0$) حقیقی و مثبت است.

برهان. (آ) و (ب) و (پ) کاملاً بدیهی‌اند. برای اثبات (ت) می‌نویسیم $z = a + bi$ و توجه می‌کنیم که $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

۱۰۲۳ **تعریف.** هرگاه z عددی مختلط باشد، **قدر مطلق** آن $|z|$ جذر نامنفی $z\bar{z}$ خواهد بود؛ یعنی، $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$.

وجود (و یکتایی) $|z|$ از قضیهٔ ۱۰۲۱ و قسمت (ت) قضیهٔ ۱۰۳۱ نتیجه می‌شود.

توجه کنید که وقتی x حقیقی است، $\bar{x} = x$. درنتیجه، $|x| = \sqrt{x^2}$. بنابراین، $|x| = x$ هرگاه $x \geq 0$ و $|x| = -x$ هرگاه $x < 0$.

۱۰۳۳ قضیه. فرض کنیم z و w **اعدادی مختلط باشند. در این صورت،**
(آ) $|z| > 0$ مگر آنکه $z = 0$، و $|0| = 0$ ؛
(ب) $|\bar{z}| = |z|$ ؛
(پ) $|zw| = |z|\,|w|$ ؛
(ت) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ ؛
(ث) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

برهان. (آ) و (ب) بدیهی‌اند. قرار می‌دهیم $z = a + bi$ و $w = c + di$ با این شرط که a, b, c, d حقیقی می‌باشند. در این صورت،

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2$$

یا $|zw|^2 = (|z|\,|w|)^2$. حال (پ) از یکتایی ریشه که در قضیهٔ ۱۰۲۱ ثابت شد نتیجه می‌شود.

برای اثبات (ت) توجه می‌کنیم که $a^2 \leq a^2 + b^2$. پس

$$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

برای اثبات (ث) دقت می‌کنیم که $\bar{z}w$ مزدوج $z\bar{w}$ است. درنتیجه،

$z\bar{w}+\bar{z}w=2\operatorname{Re}(z\bar{w})$، بنابراین

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z}+z\bar{w}+\bar{z}w+w\bar{w}\\ &= |z|^2+2\operatorname{Re}(z\bar{w})+|w|^2\\ &\le |z|^2+2|z\bar{w}|+|w|^2\\ &= |z|^2+2|z|\,|w|+|w|^2=(|z|+|w|)^2.\end{aligned}$$

حال (ث) با جذر گرفتن به دست خواهد آمد .

۳۴۰۱ **نمادگذاری.** هرگاه $x_1,\dots,x_n$ اعدادی مختلط باشند ، می‌نویسیم

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=\sum_{j=1}^{n}x_j.$$

این بخش را با نامساوی مهمی ، که عموما" به **نامساوی شوارتز**[1] معروف است ، به پایان می‌بریم .

۳۵۰۱ **قضیه.** هرگاه $a_1,\dots,a_n$ و $b_1,\dots,b_n$ ***اعدادی مختلط باشند*** ، آنگاه

$$\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\bar{b}_j\right|^2\le\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2.$$

برهان. قرار می‌دهیم $A=\Sigma|a_j|^2$ ، $B=\Sigma|b_j|^2$ ، و $C=\Sigma a_j\bar{b}_j$ (در همه‌ٔ مجموعهای این برهان ، j مقادیر $1,\dots,n$ را به‌خود می‌گیرد) . گوییم هرگاه $B=0$ ، آنگاه $b_1=\cdots=b_n=0$ ، و حکم واضح است . پس فرض می‌کنیم $B>0$. بنابرقضیهٔ ۳۱۰۱ داریم

$$\begin{aligned}\sum|Ba_j-Cb_j|^2 &= \sum(Ba_j-Cb_j)(B\bar{a}_j-\overline{Cb_j})\\ &= B^2\sum|a_j|^2-B\bar{C}\sum a_j\bar{b}_j-BC\sum\bar{a}_jb_j+|C|^2\sum|b_j|^2\\ &= B^2A-B|C|^2\\ &= B(AB-|C|^2).\end{aligned}$$

چون هر جمله در مجموع اول نامنفی است ، ملاحظه می‌کنیم که

$$B(AB-|C|^2)\ge 0.$$

1. Schwarz

و چون $B > 0$ ، نتیجه می‌شود که $AB - |C|^2 \geq 0$. این همان نامساوی مطلوب‌می‌باشد.

فضاهای اقلیدسی

۳۶۰۱ چند تعریف. فرض کنیم R^k (به ازای هر عدد صحیح و مثبت k) مجموعهٔ تمام k تاییهای مرتب

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

است که در آنها $x_1, \ldots, x_k$ اعدادی حقیقی، موسوم به **مختصات** $\mathbf{x}$، می‌باشند. عنصرهای R^k را، بویژه وقتی $k > 1$ ، **نقطه** یا **بردار** می‌نامیم. بردارها را با حروف سیاه نشان خواهیم داد. هرگاه $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ و α عددی حقیقی‌باشد، قرار می‌دهیم

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k),$$
$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k).$$

درنتیجه، $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in R^k$ و $\alpha\mathbf{x} \in R^k$. اینها جمع بردارها و نیز ضرب یک برداردریک عددحقیقی (اسکالر) را تعریف می‌کنند. این دو عمل از قوانین تعویضپذیری، شرکتپذیری، و پخشپذیری تبعیت کرده (اثبات، در پرتو قوانین مشابه برای اعداد حقیقی، واضح است) R^k را به یک **فضای برداری روی میدان حقیقی** بدل می‌سازند. عنصر صفر R^k (که گاهی **مبداء** یا **بردار پوچ** خوانده می‌شود) نقطهٔ $\mathbf{0}$ است که تمام مختصاتش 0 می‌باشند.

همچنین، **حاصل ضرب داخلی** (یا **حاصل ضرب اسکالر**) $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را با

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

و نرم $\mathbf{x}$ را با

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} = \left(\sum_{1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}$$

تعریف می‌کنیم.

نهادی که هم اکنون تعریف شد (فضای برداری R^k با ضرب داخلی و نرم بالا) **فضای اقلیدسی k بعدی** نام یافته است.

۳۷۰۱ قضیه. فرض‌کنیم $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^k$ و α حقیقی باشد. در این صورت،

(آ) $|\mathbf{x}| \geq 0$؛

(ب) $|\mathbf{x}| = 0$ *اگر و فقط اگر* $\mathbf{x} = 0$؛

(پ) $|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha||\mathbf{x}|$؛

(ت) $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$؛

(ث) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$؛

(ج) $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$.

برهان. (آ) و (ب) و (پ) واضح‌اند، و (ت) نتیجهٔ مستقیم نامساوی شوارتز می‌باشد. بنابر (ت) داریم

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\
&= \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \\
&\leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 \\
&= (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2.
\end{aligned}$$

در نتیجه، (ث) ثابت می‌شود. بالاخره، (ج) از (ث)، در صورت تعویض $\mathbf{x}$ با $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ و $\mathbf{y}$ با $\mathbf{y} - \mathbf{z}$، به‌دست خواهد آمد.

۳۸۰۱ چند تبصره. قسمتهای (آ)، (ب)، و (ج) قضیهٔ ۳۷۰۱ به ما این‌رخصت را می‌دهند (ر.ک. فصل ۲) که R^k را به عنوان یک فضای متری در نظر بگیریم.

R^1 (مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی) را معمولاً "**خط** یا **خط حقیقی**" می‌نامند. و نیز، R^2 را **صفحه** یا **صفحهٔ مختلط** نام داده‌اند (تعریفهای ۲۴۰۱ و ۳۶۰۱ را با هم مقایسه کنید). در این دو حالت، نرم همان قدر مطلق عدد حقیقی یا عدد مختلط مربوطه خواهد بود.

ضمیمه

در این ضمیمه، قضیهٔ ۱۹۰۱ با ساختن R از Q ثابت می‌شود. نحوهٔ ساختن را به چند مرحله تقسیم می‌کنیم.

مرحلهٔ ۱. اعضای R زیرمجموعه‌های معینی از Q هستند به نام **بریدگی**. یک‌بریدگی،

بنابه تعریف، مجموعه‌ای است مانند $\alpha \subset Q$ با سه خاصیت زیر:

(یک) α تهی نیست و $\alpha \neq Q$؛

(دو) هرگاه $p \in \alpha$، $q \in Q$، و $q < p$، آنگاه $q \in \alpha$؛

(سه) هرگاه $p \in \alpha$، آنگاه، به‌ازای $r \in \alpha$ ی، $p < r$.

حروف p، q، r، ... همیشه نشانگر اعدادی گویا، و α، β، γ، ... نمایشگر بریدگی خواهند بود.

توجه کنید که (سه) فقط این را می‌گوید که α بزرگترین عضو ندارد. (دو) موجب دو مطلب می‌شود که آزادانه به‌کار خواهند رفت:

هرگاه $p \in \alpha$ و $q \notin \alpha$، آنگاه $p < q$؛

هرگاه $r \notin \alpha$ و $r < s$، آنگاه $s \notin \alpha$.

مرحلهٔ ۲. " $\alpha < \beta$ " را به این معنی می‌گیریم که " α یک زیرمجموعهٔ حقیقی β است".

حال ببینیم این نیازهای تعریف ۵۰۱ رابرمی‌آورد یا نه. گوییم هرگاه $\alpha < \beta$ و $\beta < \gamma$، واضح است که $\alpha < \gamma$. (هر زیرمجموعهٔ حقیقی یک زیرمجموعهٔ حقیقی زیر ــ مجموعه‌ای حقیقی است.) همچنین، واضح‌است که به‌ازای هر جفت α و β حداکثر یکی ازسه رابطهٔ

$$\alpha < \beta, \qquad \alpha = \beta, \qquad \beta < \alpha$$

برقرار است. برای اثبات برقراری دست‌کم یکی، فرض کنیم دوتای اول درست نباشند. در این صورت، α زیرمجموعهٔ β نخواهد بود. از اینرو، $p \in \alpha$ ای ــ هست که $p \notin \beta$. هرگاه $q \in \beta$، نتیجه می‌شود که $q < p$ (زیرا $p \notin \beta$). درنتیجه، بنابر (دو)، $q \in \alpha$. لذا، $\beta \subset \alpha$، چون $\beta \neq \alpha$، نتیجه می‌گیریم که $\beta < \alpha$.

بنابراین، R تا اینجا یک مجموعهٔ مرتب است.

مرحلهٔ ۳. مجموعهٔ مرتب R *دارای خاصیت کوچکترین کران بالایی است*.

برای اثبات این مطلب، فرض کنیم A یک زیرمجموعهٔ ناتهی R و $\beta \in R$ یک کران بالایی آن باشد. γ را اجتماع تمام $\alpha \in A$ ها می‌گیریم. به عبارت دیگر، $p \in \gamma$ اگر و فقط اگر به ازای $\alpha \in A$ ای $p \in \alpha$. ثابت می‌کنیم $\gamma \in R$ و $\gamma = \sup A$.

گوییم چون A تهی‌نیست، عنصری‌مانند $\alpha_0 \in A$ وجود دارد. این α_0 تهی‌نیست.

و چون $\alpha_0 \subset \gamma$ ، γ تهی نمی‌باشد. دیگر آنکه، $\gamma \subset \beta$ (زیرا، به‌ازای هر $\alpha \in A$ ، $\alpha \subset \beta$). درنتیجه، $\gamma \neq Q$. بنابراین، γ از خاصیت (یک) برخوردار است. برای اثبات (دو) و (سه)، عنصری مانند $p \in \gamma$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت، به ازای $\alpha_1 \in A$ ی، $p \in \alpha_1$. هرگاه $q < p$ ، آنگاه $q \in \alpha_1$ ؛ درنتیجه، $q \in \gamma$. این امر خاصیت (دو) را تأیید می‌کند. هرگاه $r \in \alpha_1$ طوری اختیار شود که $r > p$ ، خواهیم دید که $r \in \gamma$ (زیرا $\alpha_1 \subset \gamma$)، و درنتیجه، γ از خاصیت (سه) نیز بهره‌مند است.

بنابراین، $\gamma \in R$.

واضح است که به ازای هر $\alpha \in A$ ، $\alpha \leq \gamma$.

فرض کنیم $\delta < \gamma$. در این صورت، عنصری مثل $s \in \gamma$ هست که $s \notin \delta$. چون $s \in \gamma$ ، به‌ازای $\alpha \in A$ ای $s \in \alpha$. ازاینرو، $\delta < \alpha$ ، و δ یک کران بالایی A نیست.

این امر نتیجهٔ مطلوب، یعنی $\gamma = \sup A$ ، را به‌دست خواهد داد.

مرحلهٔ ۴. هرگاه $\alpha \in R$ و $\beta \in R$ ، $\alpha + \beta$ را مجموعهٔ تمام مجموعهای $r + s$ که $r \in \alpha$ و $s \in \beta$ تعریف می‌کنیم.

0^* را مجموعهٔ تمام اعداد گویای منفی می‌گیریم. واضح است که 0^* یک بریدگی است. **تحقیق می‌کنیم که اصول موضوع جمع** *(ر.ک. تعریف ۱۲۰۱)* **در R ، در حالی که 0^* نقش 0 را دارد، برقرارند.**

(ج ۱) باید نشان دهیم که $\alpha + \beta$ یک بریدگی است. واضح است که $\alpha + \beta$ یک زیرمجموعهٔ ناتهی Q هست. فرض کنیم $r' \notin \alpha$ و $s' \notin \beta$. پس، به‌ازای هر $r \in \alpha$ و $s \in \beta$ ، $r' + s' > r + s$. بنابراین، $r' + s' \notin \alpha + \beta$. از این نتیجه می‌شود که $\alpha + \beta$ ازخاصیت (یک) برخوردار است.

p را در $\alpha + \beta$ اختیار می‌کنیم. در این صورت، $p = r + s$ که درآن $r \in \alpha$ و $s \in \beta$. گوییم هرگاه $q < p$ ، آنگاه $q - s < r$ ؛ درنتیجه، $q - s \in \alpha$ و $q = (q - s) + s \in \alpha + \beta$. پس (دو) برقرار می‌باشد. $t \in \alpha$ را طوری می‌گیریم که $t > r$. در این صورت، $p < t + s$ ، و $t + s \in \alpha + \beta$. لذا، شرط (سه) نیز برقرار می‌باشد.

(ج ۲) $\alpha + \beta$ مجموعهٔ تمام $r + s$ هایی است که $r \in \alpha$ و $s \in \beta$. با همان تعریف، $\beta + \alpha$ مجموعهٔ کلیهٔ $s + r$ ها می‌باشد. چون به‌ازای هر $r, s \in Q$ ، $r + s = s + r$ ، پس خواهیم داشت $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

(ج ۳) این، مانند فوق، از قانون شرکتپذیری در Q نتیجه می‌شود.

(ج ۴) هرگاه $r \in \alpha$ و $s \in 0^*$ ، آنگاه $r+s<r$. درنتیجه، $r+s \in \alpha$. لذا ، $\alpha+0^* \subset \alpha$. برای رسیدن به شمول در جهت دیگر، فرض می‌کنیم $p \in \alpha$ و $r \in \alpha$ بطوری که $r>p$. در این صورت، $p-r \in 0^*$ و $p=r+(p-r) \in \alpha+0^*$. لذا، $\alpha \subset \alpha+0^*$. بنابراین، نتیجه خواهیم گرفت که $\alpha+0^*=\alpha$.

(ج ۵) $\alpha \in R$ را ثابت گرفته فرض می‌کنیم β مجموعهٔ تمام p ها با خاصیت زیر باشد:

عددی مانند $r>0$ وجود دارد بطوری که $-p-r \notin \alpha$.

به عبارت دیگر، عدد گویایی کوچکتر از $-p$ هست که در α نیست.

نشان می‌دهیم که $\beta \in R$ و $\alpha+\beta=0^*$.

گوییم هرگاه $s \notin \alpha$ و $p=-s-1$ ، آنگاه $-p-1 \notin \alpha$ ، درنتیجه $p \in \beta$. پس β تهی نیست. هرگاه $q \in \alpha$ ، آنگاه $-q \notin \beta$. درنتیجه، $\beta \neq Q$. پس β در (یک) صدق می‌کند.

$p \in \beta$ را اختیار کرده $r>0$ را طوری می‌گیریم که $-p-r \notin \alpha$. در این صورت، هرگاه $q<p$ ، آنگاه $-q-r>-p-r$ درنتیجه، $-q-r \notin \alpha$. لذا، $q \in \beta$ ، و شرط (دو) برقرار می‌باشد. قرار می‌دهیم $t=p+(r/2)$. در این صورت، $t>p$ و $-t-(r/2)=-p-r \notin \alpha$. درنتیجه، $t \in \beta$. ازاینرو، β در شرط (سه) نیز صدق می‌نماید.

یعنی، ثابت کرده‌ایم $\beta \in R$.

هرگاه $r \in \alpha$ و $s \in \beta$ ، آنگاه $-s \notin \alpha$ ، درنتیجه، $r<-s$ یا $r+s<0$. لذا، $\alpha+\beta \subset 0^*$.

برای اثبات شمول در جهت دیگر، $v \in 0^*$ را اختیار کرده قرار می‌دهیم $w=-v/2$. در این صورت، $w>0$ ، و عددی صحیح مانند n هست بطوری که $nw \in \alpha$ ولی $(n+1)w \notin \alpha$. (توجه دارید که این بخاطر خاصیت ارشمیدسی Q است!) قرار می‌دهیم $p=-(n+2)w$. در این صورت، $p \in \beta$ ، زیرا $-p-w \notin \alpha$ ، و

$$v=nw+p \in \alpha+\beta.$$

بنابراین، $0^* \subset \alpha+\beta$.

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\alpha+\beta=0^*$.

این β البته با $-\alpha$ نموده خواهد شد.

مرحلهٔ ۵ . از این اثبات که جمع تعریف شده در مرحلهٔ ۴ در اصول موضوع (ج) تعریف

۱۲۰۱ صدق می‌کند، نتیجه می‌شود که حکم ۱۴۰۱ در R معتبر است، و می‌توان یکی از ملزومات تعریف ۱۷۰۱ را ثابت کرد:

هرگاه $\alpha, \beta, \gamma \in R$ و $\beta < \gamma$، آنگاه $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

درواقع، از تعریف + در R واضح است که $\alpha + \beta \subset \alpha + \gamma$. چنانچه می‌داشتیم $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$، قانون حذف (حکم ۱۴۰۱) ایجاب می‌کرد که $\beta = \gamma$.

همچنین، نتیجه می‌شود که $\alpha > 0^*$ اگر و فقط اگر $-\alpha < 0^*$.

مرحلهٔ ۶. در وضع موجود، ضرب از جمع قدری پر زحمت‌تر است، زیرا حاصل‌ضربهای اعدادگویای‌منفی مثبت هستند. به این دلیل، ما ابتداخود را به R^+، یعنی مجموعهٔ تمام $\alpha \in R$ هایی که $\alpha > 0^*$، محدود می‌کنیم.

هرگاه $\alpha \in R^+$ و $\beta \in R^+$، $\alpha\beta$ را مجموعهٔ تمام p هایی تعریف می‌کنیم که به‌ازای $r \in \alpha$ و $s \in \beta$ که $r > 0$ و $s > 0$، $p \leq rs$.

ما 1^* را مجموعهٔ تمام q هایی می‌گیریم که $q < 1$.

در این صورت، اصول موضوع (ض) و (پ) تعریف ۱۲۰۱، که در آنها R^+ به جای F نشسته و 1^* نقش 1 را دارد، برقرار خواهند بود.

برهانها را چون خیلی شبیه برهانهای تفصیلی مرحلهٔ ۴ هستند حذف می‌کنیم. بخصوص، توجه کنید که شرط دوم تعریف ۱۷۰۱ برقرار است: هرگاه $\alpha > 0^*$ و $\beta > 0^*$، آنگاه $\alpha\beta > 0^*$.

مرحلهٔ ۷. تعریف ضرب را با قرار $\alpha 0^* = 0^* \alpha = 0^*$ و روابط زیر کامل می‌کنیم:

$$\alpha\beta = \begin{cases} (-\alpha)(-\beta) & \text{هرگاه } \alpha < 0^* \text{ و } \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta] & \text{هرگاه } \alpha < 0^* \text{ و } \beta > 0^* \\ -[\alpha \cdot (-\beta)] & \text{هرگاه } \alpha > 0^* \text{ و } \beta < 0^* \end{cases}.$$

حاصل‌ضربهای سمت راست در مرحلهٔ ۶ تعریف شده بودند.

حال‌که‌ثابت شده (در مرحلهٔ ۶) که اصول موضوع (ض) در R^+ برقرارند، می‌توان آنها را در R، با چند بار استفاده از اتحاد $\gamma = -(-\gamma)$ که بخشی از حکم ۱۴۰۱ است، در کمال سهولت اثبات کرد. (ر.ک. مرحلهٔ ۵.)

برهان قانون پخشپذیری

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

به حالات تقسیم می‌شود. به عنوان مثال، فرض می‌کنیم $\alpha > 0^*$ ، $\beta < 0^*$ ، و $\beta + \gamma > 0^*$. در این صورت، $\gamma = (\beta + \gamma) + (-\beta)$ ، و (چون از قبل به برقراری قانون پخشپذیری در R^+ واقفیم)

$$\alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha \cdot (-\beta).$$

اما $\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha\beta)$. پس

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma).$$

حالات دیگر به همین نحو ثابت می‌شوند.

در اینجا اثبات اینکه R میدانی است مرتب با خاصیت کوچکترین کران بالایی به اتمام می‌رسد.

مرحلهٔ ۸. به هر $r \in Q$ مجموعهٔ r^* را مربوط می‌کنیم که از تمام $p \in Q$ هایی تشکیل شده‌که $p < r$. واضح‌است‌که هر r^* یک بریدگی است ؛ یعنی، $r^* \in R$. این‌بریدگیها در روابط زیر صدق می‌نمایند:

(آ) $r^* + s^* = (r + s)^*$ ؛

(ب) $r^*s^* = (rs)^*$ ؛

(پ) $r^* < s^*$ اگر و فقط اگر $r < s$.

برای اثبات (آ)، p را در $r^* + s^*$ اختیار می‌کنیم. در این صورت، $p = u + v$ ، که در آن $u < r$ و $v < s$. پس $p < r + s$ ، که می‌گوید $p \in (r + s)^*$.

بعکس، فرض‌می‌کنیم $p \in (r + s)^*$. دراین صورت $p < r + s$. t را طوری‌می‌گیریم که $2t = r + s - p$ ، و قرار می‌دهیم

$$r' = r - t, s' = s - t.$$

پس، $r' \in r^*$ ، $s' \in s^*$ ، و $p = r' + s'$ ؛ درنتیجه، $p \in r^* + s^*$.

این (آ) را ثابت می‌کند. اثبات (ب) به همین سیاق خواهد بود.

هرگاه $r < s$ ، آنگاه $r \in s^*$ ولی $r \notin r^*$. درنتیجه، $r^* < s^*$.

هرگاه $r^* < s^*$ ، آنگاه p ای در s^* هست که $p \notin r^*$. لذا، $r \le p < s$. درنتیجه، $r < s$.

این (پ) را ثابت خواهد کرد.

مرحلهٔ ۹. در مرحلهٔ ۸ دیدیم که در تعویض اعداد گویای r با "بریدگیهای گویا"ی نظیرشان $r^* \in R$ ، مجموعها، حاصل‌ضربها، و ترتیب حفظ می‌شوند. این را می‌شود به این ترتیب گفت که میدان مرتب Q با میدان مرتب Q^* که عنصرهایش بریدگیهای گویا هستند **یکریخت** است. البته، r^* بهیچوجه همان r نیست، لکن خواص مورد نظر ما (خواص حسابی و ترتیب) در هر دو میدان یکی هستند.

بخاطر این انطباق Q با Q^* است که اجازه داریم Q را یک زیرمیدان R بدانیم. قسمت دوم قضیهٔ ۱۹۰۱ باید بر حسب این انطباق فهمیده شود. توجه کنید که همین وضع وقتی مجموعهٔ اعداد حقیقی را زیرمیدانی از میدان مختلط می‌گیریم، و حتی در سطح خیلی ابتدایی‌تر، یعنی وقتی مجموعهٔ اعداد صحیح را بر زیرمجموعهٔ معینی از Q منطبق می‌کنیم، نیز پیش خواهد آمد.

حقیقت آن است (در اینجا آن را ثابت نمی‌کنیم) که **هر دو میدان مرتب باخاصیت کوچکترین‌کران بالایی یکریخت هستند**. ازاینرو، قسمت اول قضیهٔ ۱۹۰۱ میدان حقیقی R را کاملا" مشخص خواهد کرد.

کتابهای لاندو[1] و ترستن[2]، که در کتابنامه آمده‌اند، کلا" به دستگاههای اعداد اختصاص دارند. فصل یک کتاب کنوپ[3] شرح مبسوطتری از اینکه چطور می‌شود R را از Q ساخت به دست می‌دهد. شیوه‌ای دیگر برای ساختن، که در آن هر عدد حقیقی مساوی رده‌ای هم‌ـ ارزی از دنباله‌های کشی[4] از اعداد گویا (ر.ک. فصل ۳) تعریف شده، در بخش ۵ کتاب هیویت[5] و اشترومبرگ[6] مطرح شده است.

بریدگیهای در Q را که در اینجا مورد استفادهٔ ما قرار گرفتند ددکیند[7] ابداع کرده بود. ساختن R از Q توسط دنباله‌های کشی از آن کانتور[8] است. هم کانتور و هم ددکیند روشهای ساختن خود را در ۱۸۷۲ منتشر کردند.

---

1. Landau
2. Thurston
3. Knopp
4. Cauchy
5. Hewitt
6. Stromberg
7. Dedekind
8. Cantor

تمرین

جمیع اعداد ذکر شده در این تمرینها را حقیقی بگیرید مگر آنکه خلافش تصریح شده باشد.

۱. هرگاه $r(\neq 0)$ گویا و x گنگ باشد، ثابت کنید $r+x$ و rx گنگ‌اند.

۲. ثابت کنید عدد گویایی نیست که مربعش ۱۲ باشد.

۳. حکم ۱۵۰۱ را ثابت نمایید.

۴. E را یک زیرمجموعهٔ ناتهی مجموعه‌ای مرتب انگاشته، فرض کنید α یک کران پایینی و β یک کران بالایی آن باشد. ثابت کنید $\alpha \leq \beta$.

۵. A را مجموعه‌ای ناتهی از اعداد حقیقی بگیرید که از پایین کراندار باشد. همچنین، $-A$ را مجموعهٔ تمام $-x$ هایی بینگارید که $x \in A$. ثابت کنید

$$\inf A = -\sup(-A).$$

۶. $b>1$ را ثابت نگهدارید.

(آ) هرگاه m, n, p, q اعدادی‌صحیح‌باشند، $n>0$، $q>0$، و $r=m/n=p/q$، ثابت کنید

$$(b^m)^{1/n}=(b^p)^{1/q}.$$

لذا، تعریف $b^r=(b^m)^{1/n}$ معنی دارد.

(ب) ثابت کنید هرگاه r و s گویا باشند، $b^{r+s}=b^r b^s$.

(پ) در صورت حقیقی بودن x، $B(x)$ را مجموعهٔ تمام اعدادی چون b^t تعریف کنید که در آنها t گویاست و $t \leq x$. ثابت کنید، وقتی r گویا باشد،

$$b^r=\sup B(r).$$

بنابراین، تعریف

$$b^x=\sup B(x)$$

به‌ازای هر x حقیقی معنی خواهد داشت.

(ت) ثابت کنید به‌ازای هر x و y حقیقی $b^{x+y}=b^x b^y$.

۷. $b>1$ و $y>0$ را ثابت گرفته، با تکمیل شرح مجمل زیر، ثابت کنید x حقیقی منحصر بفردی هست بطوری‌که $b^x=y$. (این x **لگاریتم** y **در پایهٔ** b نام دارد.)

(آ) به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n، $b^n-1 \geq n(b-1)$.

(ب) بنابراین، $b-1 \geq n(b^{1/n}-1)$.

(پ) هرگاه $t>1$ و $n>(b-1)/(t-1)$، آنگاه $b^{1/n}<t$.

(ت) هرگاه w چنان باشد که $b^w < y$ ، آنگاه، به‌ازای n به قدر کافی بزرگ، $b^{w+(1/n)} < y$. برای اثبات این مطلب، از قسمت (پ) با فرض $t = y \cdot b^{-w}$ استفاده کنید.

(ث) هرگاه $b^w > y$ ، آنگاه به‌ازای n به قدر کافی بزرگ، $b^{w-(1/n)} > y$.

(ج) فرض کنید A مجموعهٔ تمام w هایی باشد که $b^w < y$ ، و نشان دهید که $x = \sup A$ در $b^x = y$ صدق می‌کند.

(چ) ثابت کنید این x منحصر بفرد است.

۸ . ثابت کنید در میدان مختلط هیچ ترتیبی که آن را به یک میدان مرتب بدل کند قابل تعریف نیست. ***راهنمایی:*** -1 یک مربع است.

۹ . فرض کنید $z = a + bi$ و $w = c + di$. هرگاه $a < c$ ونیز هرگاه $a = c$ ولی $b < d$ ، تعریف‌کنید $z < w$. ثابت کنید این تعریف مجموعهٔ تمام اعداد مختلط را به یک مجموعهٔ مرتب بدل می‌کند. (به دلایل مشهود، این نوع رابطهٔ ترتیبی را یک ***ترتیب لغت‌نامه‌ای*** یا ***ترتیب قاموسی*** می‌نامند.) آیا این مجموعهٔ مرتب خاصیت کوچکترین کران بالایی دارد؟

۱۰ . فرض کنید $z = a + bi$ ، $w = u + iv$ ، و

$$a = \left(\frac{|w| + u}{2}\right)^{1/2}, \qquad b = \left(\frac{|w| - u}{2}\right)^{1/2}.$$

ثابت کنید هرگاه $v \geq 0$ ، $z^2 = w$ و، هرگاه $v \leq 0$ ، $(\bar{z})^2 = w$. نتیجه بگیرید که هر عدد مختلط (جز در یک مورد!) دارای دو جذر مختلط است.

۱۱ . هرگاه z عددی مختلط باشد، ثابت کنید عددی چون $r \geq 0$ و عددی مختلط مثل w با شرط $|w| = 1$ وجود دارند بطوری‌که $z = rw$. آیا w و r همواره منحصراً به وسیلهٔ z معین می‌شوند؟

۱۲ . هرگاه $z_1, \ldots, z_n$ مختلط باشند، ثابت کنید

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

۱۳ . هرگاه x و y مختلط باشند، ثابت کنید

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

۱۴ . هرگاه z یک عدد مختلط باشد بطوری که $|z| = 1$ ، یعنی $z\bar{z} = 1$ ، عبارت

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2$$

را محاسبه نمایید.

۱۵ . تحت چه شرایطی در نامساوی شوارتز تساوی برقرار است ؟

۱۶ . فرض کنید $k \geq 3$ ، $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^k$ ، $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = d > 0$ و $r > 0$. ثابت کنید :

(آ) هرگاه $2r > d$ ، بی‌نهایت $\mathbf{z} \in R^k$ هست که

$$|\mathbf{z}-\mathbf{x}| = |\mathbf{z}-\mathbf{y}| = r;$$

(ب) اگر $2r = d$ ، دقیقاً یک $\mathbf{z}$ با این خاصیت وجود دارد ؛

(پ) چنانچه $2r < d$ ، چنین $\mathbf{z}$ ی وجود نخواهد داشت .

هرگاه k مساوی 2 یا 1 باشد ، این احکام چطور باید اصلاح شوند ؟

۱۷ . ثابت کنید که اگر $\mathbf{x} \in R^k$ و $\mathbf{y} \in R^k$ ،

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = 2|\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{y}|^2.$$

این رابطه را به صورت حکمی در باب متوازی الاضلاعها تعبیر هندسی نمایید .

۱۸ . هرگاه $k \geq 2$ و $\mathbf{x} \in R^k$ ، ثابت کنید $\mathbf{y}$ ی در R^k هست بطوری که $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ ولی $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. آیا این مطلب اگر $k = 1$ نیز درست است ؟

۱۹ . فرض کنید $\mathbf{a} \in R^k$ و $\mathbf{b} \in R^k$ ، $\mathbf{c} \in R^k$ و $r > 0$ را طوری بیابید که

$$|\mathbf{x}-\mathbf{a}| = 2|\mathbf{x}-\mathbf{b}|$$

اگر و فقط اگر $|\mathbf{x}-\mathbf{c}| = r$. (حل : $3\mathbf{c} = 4\mathbf{b} - \mathbf{a}$ ، $3r = 2|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$)

۲۰ . با اشاره به ضمیمه ، فرض کنید خاصیت (سه) از تعریف بریدگی حذف شده باشد . تعریفهای ترتیب و جمع را همانطور که هست نگهدارید . نشان دهید که مجموعهٔ مرتب حاصل خاصیت کوچکترین کران بالایی دارد ، جمع در اصول موضوع (ج ۱) تا (ج ۴) (با عنصر صفر اندکی متفاوت !) صدق می‌کند ، لیکن (ج ۵) برقرار نخواهد بود .

۲
توپولوژی پایه

مجموعه های متناهی، شمارشپذیر، وشمارش ناپذیر

این بخش را با تعریفی از مفهوم تابع آغاز می‌کنیم .

۱۰۲ **تعریف.** دو مجموعهٔ A و B را که عناصرشان اشیاء دلخواهی هستند درنظر می‌گیریم ، و فرض می‌کنیم به هر عنصر x از A عنصری از B ، که آن را به $f(x)$ نشان می‌دهیم ، بنوعی مربوط شده باشد . در این صورت ، گوییم f یک **تابع** از A به B (یا یک **نگاشت** از A بتوی B) است . مجموعهٔ A را **قلمرو** f می‌نامیم (همچنین ، می‌گوییم f بر A تعریف شده است) ، و $f(x)$ ها را **مقدارهای** f می‌خوانیم . مجموعهٔ تمام مقادیر f **برد** f نام دارد .

۲۰۲ **تعریف.** فرض کنیم A و B دو مجموعه بوده ، و f یک نگاشت از A بتوی B باشد . هرگاه $E \subset A$ ، $f(E)$ مجموعهٔ تمام $f(x)$ هایی تعریف می‌شود که $x \in E$. $f(E)$ را نقش E تحت f می‌نامیم . با این نمادگذاری ، $f(A)$ برد f خواهدبود .واضح است که $f(A) \subset B$. هرگاه $f(A) = B$ ، می‌گوییم f ، A را **بروی** B می‌نگارد . (توجه کنید که ، بر طبق این قرار ، نگاشت **برو**خاصتر از نگاشت **بتو** است .)

هرگاه $E \subset B$ ، $f^{-1}(E)$ مجموعهٔ تمام x هایی در A است که $f(x) \in E$. $f^{-1}(E)$ را **نقش معکوس** E تحت f می‌نامیم . چنانچه $y \in B$ ، $f^{-1}(y)$ مجموعهٔ تمام x هایی در A است که $f(x) = y$. هرگاه ، به‌ازای هر $y \in B$ ، $f^{-1}(y)$ حداکثر شامل یک عنصر از A باشد ، آنگاه f یک نگاشت 1-1 (**یک بـه یک**) از A بتوی B نام دارد . این را می‌شود به این صورت نیز بیان‌کرد : f در صورتی یک نگاشت 1-1 از A بتوی B است که هر وقت $x_1, x_2 \in A$ و $x_1 \neq x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(نماد $x_1 \neq x_2$ یعنی x_1 و x_2 عنصرهایی متمایزند. در غیر این صورت، می‌نویسیم $x_1 = x_2$.)

۳۰۲ تعریف. هرگاه یک نگاشت 1-1 از A **بروی** B موجود باشد، می‌گوییم A و B را می‌توان در ***تناظر*** 1-1 قرار داد، یا اینکه A و B دارای یک ***عدد اصلی*** هستند، یا، مختصرا"، A و B ***هم‌ارز*** هستند، و می‌نویسیم $A \sim B$. این رابطه آشکارا از خواص زیر بهره‌مند است:

منعکس است: $A \sim A$؛

متقارن است: هرگاه $A \sim B$، آنگاه $B \sim A$؛

متعدی است: هرگاه $A \sim B$ و $B \sim C$، آنگاه $A \sim C$.

هر رابطه با این سه خاصیت یک ***رابطهٔ هم‌ارزی*** نام خواهد داشت.

۴۰۲ تعریف. به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n، فرض می‌کنیم J_n مجموعه‌ای باشد که عنصرهایش اعداد صحیح $1, 2, \ldots, n$ اند. همچنین، J را مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت می‌انگاریم. برای هر مجموعه مانند A، می‌گوییم:

(آ) A ***متناهی*** است هرگاه، به‌ازای n ی، $A \sim J_n$ (مجموعهٔ تهی را نیز متناهی می‌گیریم)؛

(ب) A ***نامتناهی*** است هرگاه متناهی نباشد؛

(پ) A ***شمارشپذیر*** است هرگاه $A \sim J$؛

(ت) A ***شمارش‌ناپذیر*** است هرگاه نه A متناهی باشد و نه شمارشپذیر؛

(ث) A ***حداکثر شمارشپذیر*** است هرگاه A متناهی یا شمارشپذیر باشد.

مجموعه‌های شمارشپذیر راگاهی ***قابل شمارش*** یا ***شمارا*** می‌گویند.

واضح است که به‌ازای دو مجموعهٔ متناهی A و B، $A \sim B$ اگر و فقط اگر A و B یک تعداد عنصر داشته باشند. اما، درمورد مجموعه‌های نامتناهی، ایدهٔ "یک تعداد عنصر داشتن" بکلی مبهم است، درحالی که مفهوم تناظر 1-1 روشنی خود را حفظ خواهد کرد.

۵۰۲ مثال. فرض کنیم A مجموعهٔ تمام اعداد صحیح باشد. پس A شمارشپذیر است. زیرا، مجموعه‌های A و J را با آرایشهای زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} A: & 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots \\ J: & 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots . \end{array}$$

حتی در این مثال می‌توان برای تابع f از J به A که تناظری 1-1 برقرار می‌کند فرمول صریحی ارائه داد :

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & (\text{زوج } n), \\ -\dfrac{n-1}{2} & (\text{فرد } n). \end{cases}$$

۶۰۲ **تبصره.** یک مجموعهٔ متناهی نمی‌تواند با هیچیک از زیرمجموعه‌های حقیقی خود هم‌ارز باشد . اما اینکه این امر برای مجموعه‌های نامتناهی میسر است در مثال ۵۰۲ نشان داده شده ، که در آن J یک زیرمجموعهٔ حقیقی A می‌باشد .

درواقع ، تعریف ۴۰۲ (ب) را می‌توانستیم با این عبارت عوض کنیم : A نامتناهی است اگر که با یکی از زیرمجموعه‌های حقیقی خود هم‌ارز باشد .

۷۰۲ **تعریف.** منظور از یک **دنباله** یعنی تابعی مانند f که بر مجموعهٔ تمام اعداد صحیح و مثبت J تعریف شده است . هرگاه به ازای هر $n \in J$ ، $f(n) = x_n$ ، معمول شده که دنبالهٔ f را با علامت $\{x_n\}$ ، یاگاهی با $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ، نشان می‌دهند . **مقادیر** f ، یعنی عنصرهای x_n ، را **جمله‌های** دنباله می‌نامند . چنانچه A یک مجموعه باشد و به ازای هر $n \in J$ ، $x_n \in A$ ، $\{x_n\}$ یک **دنباله در** A ، یا یک **دنباله از عناصر** A ، خوانده خواهد شد .

توجه دارید که جملات $x_1, x_2, x_3, \ldots$ یک دنباله لزوماً از هم متمایز نیستند .

چون هر مجموعهٔ شمارشپذیر برد یک تابع 1-1 تعریف شده بر J است ، لذا هر مجموعهٔ شمارشپذیر را می‌توان برد یک دنباله با جملات متمایز انگاشت . اندکی بی‌پرواتر ، می‌شود گفت که عنصرهای هر مجموعهٔ شمارشپذیر را می‌توان " به شکل یک دنباله آراست " .

گاهی در این تعریف شایسته است J را با مجموعهٔ تمام اعداد صحیح نامنفی عوض کنیم ؛ یعنی ، به جای 1 از 0 شروع نماییم .

۲ ۰ ۸ قضیه. هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از مجموعهٔ شمارشپذیر A شمارشپذیر است.

برهان. فرض کنیم $E \subset A$ و E نامتناهی باشد. عنصرهای x از A را به شکل دنبالهٔ $\{x_n\}$ از عناصر متمایز می‌آراییم. دنبالهٔ $\{n_k\}$ را به صورت زیر می‌سازیم:
فرض کنیم n_1 کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که $x_{n_1} \in E$. پس از انتخاب $n_1, \ldots, n_{k-1}$ ($k = 2, 3, 4, \ldots$)، n_k را کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از n_{k-1} که $x_{n_k} \in E$ می‌گیریم.
با قرار $f(k) = x_{n_k}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$)، یک تناظر 1-1 بین E و J به دست خواهیم آورد.

قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که مجموعه‌های شمارشپذیر، با بیان نادقیق، نمایشگر "کوچکترین" *بی‌نهایت* هستند: هیچ مجموعهٔ شمارش ناپذیری نمی‌تواند زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای شمارشپذیر باشد.

۲ ۰ ۹ تعریف. فرض کنیم A و Ω مجموعه باشند، و به هر عنصر α از A زیرمجموعه‌ای از Ω، که با E_α نشانش می‌دهیم، مربوط شده باشد.
مجموعه‌ای که عناصرش مجموعه‌های E_α باشند با $\{E_\alpha\}$ نموده خواهد شد. گاهی به جای آنکه بگوییم مجموعه‌ای از مجموعه‌ها می‌گوییم گردآیه‌ای از مجموعه‌ها، یا خانواده‌ای از مجموعه‌ها.

اجتماع مجموعه‌های E_α مساوی مجموعه‌ای چون S تعریف می‌شود به این صورت که $x \in S$ اگر و فقط اگر به‌ازای دست‌کم یک $\alpha \in A$، $x \in E_\alpha$. ما نماد

$$S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha. \tag{1}$$

را برای آن به‌کار می‌بریم. چنانچه A از اعداد صحیح $1, 2, \ldots, n$ تشکیل شده باشد، معمولاً" می‌نویسند

$$S = \bigcup_{m=1}^{n} E_m \tag{2}$$

یا

$$S = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n. \tag{3}$$

هرگاه A مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت باشد، نماد متداول چنین خواهد بود:

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m . \tag{4}$$

علامت ∞ در (۴) فقط نشان می‌دهد که اجتماع گردآیه‌ای **شمارشپذیر** ازمجموعه‌ها اختیار شده است، و نباید آن را با علامات $+\infty$ و $-\infty$ مذکور در تعریف ۲۳۰۱ خلط کرد.

اشتراک مجموعه‌های E_α برابر مجموعه‌ای چون P تعریف می‌شود به این نحو که $x \in P$ اگر و فقط اگر به ازای هر $\alpha \in A$، $x \in E_\alpha$. مثل حالت اجتماع، از نماد

$$P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha , \tag{5}$$

یا

$$P = \bigcap_{m=1}^{n} E_m = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n , \tag{6}$$

یا

$$P = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m \tag{7}$$

استفاده خواهیم کرد. هرگاه $A \cap B$ تهی نباشد، می‌گوییم A و B ***یکدیگر را قطع می‌کنند***. در غیر این صورت، آنها را *ازهم‌جدا* خواهیم نامید.

۱۰۰۲ چند مثال

(آ) فرض کنیم E_1 از $1, 2, 3$ وE_2از $2, 3, 4$ تشکیل شده باشد. در این صورت، $E_1 \cup E_2$ از $1, 2, 3, 4$ ترکیب یافته، حال‌آنکه $E_1 \cap E_2$ از $2, 3$ متشکل می‌باشد.

(ب) فرض کنیم A مجموعهٔ اعداد حقیقی x که $0 < x \le 1$ باشد. به ازای‌هر $x \in A$، E_x را مجموعهٔ اعداد حقیقی y که $0 < y < x$ می‌انگاریم. در این صورت،

(یک) $E_x \subset E_z$ اگر و فقط اگر $0 < x \le z \le 1$؛

(دو) $\bigcup_{x \in A} E_x = E_1$؛

(سه) $\bigcap_{x \in A} E_x$ تهی است.

حکمهای (یک) و (دو) واضح هستند. برای اثبات (سه)، ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر $y > 0$ ، اگر $x < y$ ، $y \notin E_x$. پس $y \notin \bigcap_{x \in A} E_x$.

۱۱۰۲ چند تبصره. بسیاری از خواص اجتماعها و اشتراکها کاملاً" شبیه به خواص مجموعها و حاصل ضربها هستند. درواقع، گاهی واژه‌های مجموع و حاصل ضرب در این مورد به کار می‌رفته، و علامات Σ و Π به جای $\bigcup$ و $\bigcap$ نوشته می‌شدند.

قوانین تعویضپذیری و شرکتپذیری بدیهی‌اند:

$$(8)\qquad A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A.$$

$$(9)\qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

لذا، حذف پرانتزها در (۳) و (۶) مجاز می‌باشد.

قانون پخشپذیری نیز برقرار است:

$$(10)\qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

برای اثبات این رابطه، طرفهای چپ و راست آن‌را بترتیب با E و F نشان می‌دهیم.

فرض می‌کنیم $x \in E$. دراین‌صورت، $x \in A$ و $x \in B \cup C$؛ یعنی، $x \in B$ یا $x \in C$ (یا احتمالاً" به هر دو). ازاینرو، $x \in A \cap B$ یا $x \in A \cap C$. در نتیجه، $x \in F$. لذا، $E \subset F$.

حال فرض می‌کنیم $x \in F$. در این صورت، $x \in A \cap B$ یا $x \in A \cap C$. یعنی $x \in A$ و $x \in B \cup C$. پس $x \in A \cap (B \cup C)$. لذا، $F \subset E$.

از اینجا نتیجه می‌شود که $E = F$.

چند رابطهٔ دیگر را که صحتشان به آسانی قابل تحقیق است ذکر می‌نماییم:

$$(11)\qquad A \subset A \cup B,$$

$$(12)\qquad A \cap B \subset A.$$

هرگاه 0 مجموعهٔ تهی باشد، آنگاه

$$(13)\qquad A \cup 0 = A, \qquad A \cap 0 = 0.$$

هرگاه $A \subset B$ ، آنگاه

$$(14)\qquad A \cup B = B, \qquad A \cap B = A.$$

۱۲۰۲ قضیه. فرض کنیم $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ دنباله‌ای از مجموعه‌های شمارشپذیر باشد و قرار داده باشیم

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n . \tag{15}$$

در این صورت، S شمارشپذیر است.

برهان. فرض کنیم هر E_n به صورت دنبالهٔ $\{x_{nk}\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ آراسته شده باشد، و آرایهٔ نامتناهی

$$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{16}$$

را در نظر می‌گیریم که در آن عنصرهای E_n سطر n م را تشکیل می‌دهند. این آرایه شامل کلیهٔ عناصر S است. همانطور که سهمها نشان می‌دهند، این عنصرها را می‌توان به صورت دنبالهٔ

$$x_{11} ; x_{21}, x_{12} ; x_{31}, x_{22}, x_{13} ; x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14} ; \ldots \tag{17}$$

آراست. هرگاه دوتا از مجموعه‌های E_n عنصر مشترک داشته باشند، این عناصر بیش از یک بار در (۱۷) ظاهر می‌شوند. لذا، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت مانند T هست که $S \sim T$، که نشان می‌دهد S حداکثر شمارشپذیر است (قضیهٔ ۲ . ۸). چون $E_1 \subset S$ و E_1 نامتناهی است، S نامتناهی بوده، درنتیجه، شمارشپذیر خواهد بود.

نتیجه. فرض‌کنیم A حداکثر شمارشپذیر و به‌ازای هر $\alpha \in A$، B_α حداکثر شمارشپذیر باشد. قرار می‌دهیم

$$T = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha .$$

در این صورت، T حداکثر شمارشپذیر خواهد بود.

زیرا T با زیرمجموعه‌ای از (۱۵) هم ارز است.

۱۳۰۲ قضیه. فرض‌کنیم A مجموعه‌ای شمارشپذیر ، و B_n مجموعهٔ تمام n تاییهای مرتب $(a_1, \dots, a_n)$ باشد که در آنها $a_k \in A\ (k = 1, \dots, n)$ ، و عناصر $a_1, \dots, a_n$ لزوماً متمایز نیستند. در این صورت، B_n شمارشپذیر خواهد بود.

برهان. شمارشپذیری B_1 واضح است ، چرا که $B_1 = A$. فرض کنیم B_{n-1} $(n = 2, 3, 4, \dots)$ شمارشپذیر باشد. عنصرهای B_n به شکل

$$(b, a) \quad (b \in B_{n-1} \text{ و } a \in A) \text{ اند.} \tag{18}$$

به‌ازای هر b ی ثابت، مجموعهٔ جفتهای (b, a) هم ارز A است ، وازاینرو شمارشپذیر است. لذا ، B_n اجتماع مجموعه‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های شمارشپذیر می‌باشد. پس، بنابر قضیهٔ ۱۲۰۲، B_n شمارشپذیر است.

حال قضیه به استقرا نتیجه می‌شود.

نتیجه. مجموعهٔ تمام اعداد گویا شمارشپذیر است.

برهان. باتوجه به‌اینکه هر عدد گویای r به شکل b/a است که در آن a و b صحیح‌اند، قضیهٔ ۱۳۰۲ را با فرض $n = 2$ به کارمی‌بریم. بدین ترتیب، مجموعهٔ جفتهای (a, b) ، و درنتیجه، مجموعهٔ کسرهای b/a شمارشپذیر خواهد بود.

درواقع، حتی مجموعهٔ تمام اعداد جبری شمارشپذیر است (ر.ک. تمرین ۲).

اما این مطلب را که همهٔ مجموعه‌های نامتناهی شمارشپذیر نیستند، قضیهٔ بعدی نشان خواهد داد.

۱۴۰۲ قضیه. فرض‌کنیم A مجموعهٔ تمام دنباله‌هایی باشد که عنصرهایشان ارقام 0 و 1 هستند. این A شمارش‌ناپذیر می‌باشد.

عنصرهای A دنباله‌هایی هستند مثل $1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \dots$.

برهان. فرض‌کنیم E یک زیرمجموعهٔ شمارشپذیر A ومرکب از دنباله‌های $s_1, s_2, s_3, \dots$ باشد. دنبالهٔ s را این طور می‌سازیم: اگر جملهٔ n م s_n مساوی 1 باشد، جملهٔ n م s را 0 اختیار می‌کنیم، و بالعکس. در این صورت، دنبالهٔ s با هر عضو E دست‌کم در یک جا فرق دارد. بنابراین، $s \notin E$. اما واضح است که $s \in A$ ؛ درنتیجه، E یک

زیرمجموعهٔ حقیقی A می‌باشد.

نشان داده‌ایم که هر زیرمجموعهٔ شمارشپذیر A یک زیرمجموعهٔ حقیقی A است. از اینجانتیجه می‌شود که A شمارش ناپذیراست (زیرا، درغیراین‌صورت، A زیرمجموعهٔ حقیقی خود می‌شود، که بی‌معنی است).

ایدهٔ اثبات فوق اول‌بار مورد استفادهٔ کانتور قرار گرفت، و **فرایند قطری کانتور** نام یافته است، چرا که، اگر دنباله‌های $s_1, s_2, s_3, \ldots$ را درآرایه‌ای مثل (۱۶) قرار دهیم، این عناصر روی قطر هستند که دنبالهٔ جدید را می‌سازند.

خوانندگانی که با نمایش دودویی اعداد حقیقی (پایهٔ 2 به جای 10) آشناهستند توجه خواهند داشت که قضیهٔ ۱۴۰۲ شمارش ناپذیری مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی را ایجاب می‌کند. برهان دیگری از این مطلب در قضیهٔ ۴۳۰۲ داده خواهد شد.

فضاهای متری

۱۵۰۲ تعریف. مجموعهٔ X، که عنصرهایش‌را **نقاط** خواهیم نامید، درصورتی یک **فضای متری** است که به هر دو نقطهٔ p و q از X عدد حقیقی $d(p, q)$، به نام **فاصله** از p تا q، طوری مربوط شده باشد که

(آ) $d(p,q) > 0$ هرگاه $p \neq q$، و $d(p,p) = 0$؛

(ب) $d(p,q) = d(q,p)$؛

(پ) به‌ازای هر $r \in X$، $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

هر تابع برخوردار از این سه خاصیت یک **تابع فاصله** یا یک **متر** نام دارد.

۱۶۰۲ چند مثال. مهمترین مثالهای فضاهای متری، از دیدگاه ما، عبارتند از فضاهای اقلیدسی R^k، بویژه R^1 (خط حقیقی) و R^2 (صفحهٔ مختلط)؛ فاصله در R^k این طور تعریف می‌شود:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^k). \tag{19}$$

بنابر قضیهٔ ۳۷۰۱، dی رابطهٔ (۱۹) در شرطهای تعریف ۱۵۰۲ صدق می‌کند.

توجه به این‌امر مهم است که هرزیر مجموعهٔ Y از فضای متری X خود فضایی‌متری، با همان‌تابع فاصله، می‌باشد. زیرا واضح است که اگر شرطهای (آ) تا (پ) تعریف ۱۵۰۲ برای $p, q, r \in X$ برقرار باشند، این شرطها در صورت مقید شدن p و q و r به Y نیز برقرار خواهند بود.

بنابراین، هر زیرمجموعه از یک فضای اقلیدسی فضایی متری است. مثالهایی دیگر عبارت خواهند بود از فضاهای $\mathscr{C}(K)$ و $\mathscr{L}^2(\mu)$، که بترتیب در فصلهای ۷ و ۱۱ مطرح خواهند شد.

۱۷۰۲ تعریف. منظور از **قطعهٔ** (a, b) یعنی مجموعهٔ تمام x های حقیقی که $a < x < b$. منظور از **بازهٔ** $[a, b]$ یعنی مجموعهٔ تمام x های حقیقی که $a \le x \le b$.

گاهی اوقات با "بازه‌های نیمباز" $[a, b)$ و $(a, b]$ نیز مواجه می‌شویم. اولی عبارت است از تمام x هایی که $a \le x < b$، و دومی مرکب است از کلیهٔ x هایی که $a < x \le b$.

هرگاه به‌ازای هر $i = 1, \ldots, k$، $a_i < b_i$، مجموعهٔ تمام نقاطی چون $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ در R^k که مختصاتشان در نامساویهای $a_i \le x_i \le b_i \ (1 \le i \le k)$ صدق کنند یک **حجرهٔ** k **بعدی** نام دارد. مثلاً، هر حجرهٔ یک بعدی یک بازه است، هر حجرهٔ دو بعدی یک مستطیل است، و مانند اینها.

هرگاه $\mathbf{x} \in R^k$ و $r > 0$، **گوی باز** (یا بستهٔ) B به مرکز $\mathbf{x}$ و شعاع r عبارت است از مجموعهٔ تمام $\mathbf{y} \in R^k$ هایی که $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r$ (یا $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \le r$).

مجموعهٔ $E \subset R^k$ را **محدب** خوانیم هرگاه، هر وقت $\mathbf{x} \in E, \mathbf{y} \in E$، و $0 < \lambda < 1$، داشته باشیم

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in E.$$

به عنوان مثال، **گویها مجموعه‌هایی محدب‌اند.** چرا که اگر $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r$، $|\mathbf{z} - \mathbf{x}| < r$، و $0 < \lambda < 1$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z} - \mathbf{x}| &= |\lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (1 - \lambda)(\mathbf{z} - \mathbf{x})| \\ &\le \lambda |\mathbf{y} - \mathbf{x}| + (1 - \lambda)|\mathbf{z} - \mathbf{x}| \\ &< \lambda r + (1 - \lambda) r = r. \end{aligned}$$

همین برهان در مورد گویهای بسته قابل بیان است. همچنین، به‌آسانی دیده می‌شود که حجره‌های k بعدی محدب می‌باشند.

۱۸۰۲ تعریف. فرض کنیم X یک فضای متری باشد. تمام نقاط و مجموعه‌های یاد شده در زیر، عنصرها و زیرمجموعه‌های X فرض می‌شوند.

(آ) یک **همسایگی** نقطهٔ p مجموعه‌ای است مثل $N_r(p)$ مرکب از تمام نقاطی

چون q که $d(p,q) < r$. عدد r **شعاع** $N_r(p)$ نامیده می‌شود.

(ب) نقطهٔ p یک **نقطهٔ حدی** مجموعهٔ E است هرگاه **هر** همسایگی p شامل‌نقطه‌ای چون $q \in E$ غیر از p باشد.

(پ) هرگاه $p \in E$ و p نقطهٔ حدی E نباشد، آنگاه p یک **نقطهٔ تنهای** E نام دارد.

(ت) E **بسته** است هرگاه هر نقطهٔ حدی E یک نقطه از E باشد.

(ث) نقطهٔ p یک **نقطهٔ درونی** E است هرگاه یک همسایگی از p مانند N باشد بطوری که $N \subset E$.

(ج) E **باز** است هرگاه هر نقطهٔ E یک نقطهٔ درونی‌اش باشد.

(چ) **متمم** E (که با E^c نموده می‌شود) عبارت است از مجموعهٔ تمام نقاطی چون $p \in X$ که $p \notin E$.

(ح) E **کامل** است هرگاه E بسته و هر نقطهٔ E یک نقطهٔ حدی آن باشد.

(خ) E **کراندار** است هرگاه عددی حقیقی چون M و نقطه‌ای مثل $q \in X$ باشند بطوری که به‌ازای هر $p \in E$ ، $d(p,q) < M$.

(د) E **در** X **چگال** است هرگاه هر نقطهٔ X یک نقطهٔ حدی E یا یک نقطهٔ E (و یا هر دو) باشد.

ملاحظه می‌کنیم که در R^1 همسایگیها قطعه‌ها هستند، حال آنکه در R^2 درون دوایر خواهند بود.

۱۹۰۲ قضیه. هر همسایگی یک مجموعهٔ باز است.

برهان. همسایگی $E = N_r(p)$ را در نظر گرفته، فرض می‌کنیم q نقطهٔ دلخواهی از آن باشد. در این صورت، عددی حقیقی و مثبت مثل h هست بطوری که

$$d(p,q) = r - h.$$

پس، به‌ازای هر نقطهٔ s که $d(q,s) < h$ ، داریم

$$d(p,s) \le d(p,q) + d(q,s) < r - h + h = r.$$

درنتیجه، $s \in E$. لذا، q یک نقطهٔ درونی E می‌باشد.

۲۰۰۲ قضیه. هرگاه p یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ E باشد، هر همسایگی p بی‌نهایت‌نقطه از E را دارد.

برهان . فرض‌کنیم همسایگی N از p چنان باشد که فقط تعدادی متناهی نقطه از E راداشته باشد . همچنین ، $q_1, \ldots, q_n$ را آن نقاطی از $N \cap E$ می‌انگاریم که از p متمایزند ، و قرار می‌دهیم

$$r = \min_{1 \leq m \leq n} d(p, q_m).$$

[از این نماد برای نمایش مینیمم اعداد $d(p, q_1), \ldots, d(p, q_n)$ استفاده می‌کنیم.]
واضح است که مینیمم هر مجموعهٔ متناهی از اعداد مثبت مثبت است . پس $r > 0$.

همسایگی $N_r(p)$ شامل هیچ نقطهٔ q از E که $q \neq p$ نیست . درنتیجه ، p یک نقطهٔ حدی E نمی‌باشد . این تناقض قضیه را به اثبات می‌رساند .

نتیجه . *هر مجموعهٔ متناهی از نقاط نقطهٔ حدی ندارد .*

۲۱۰۲ چند مثال . زیرمجموعه‌های زیر از R^2 را در نظر می‌گیریم :

(آ) مجموعهٔ تمام z های مختلطی که $|z| < 1$ ؛

(ب) مجموعهٔ تمام z های مختلطی که $|z| \leq 1$ ؛

(پ) یک مجموعهٔ متناهی ؛

(ت) مجموعهٔ تمام اعداد صحیح؛

(ث) مجموعهٔ مرکب از اعداد $1/n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) . ملاحظه می‌کنیم که این مجموعهٔ E یک نقطهٔ حدی (یعنی ، $z = 0$) را دارد ، اما هیچ نقطهٔ E نقطهٔ حدی آن نیست ؛ مایلیم تأکید کنیم که فرق است میان نقطهٔ حدی داشتن و حاوی یکی‌از آنها بودن ؛

(ج) مجموعهٔ تمام اعداد مختلط (یعنی ، R^2) ؛

(چ) قطعهٔ (a, b) .

توجه داریم که (ت) ، (ث) ، و (چ) را می‌توان به عنوان زیرمجموعه‌هایی از R^1 نیزدر نظر گرفت . بعضی از خواص این مجموعه‌ها در زیر به جدول آمده‌اند :

	بسته	باز	کامل	کراندار
(آ)	خیر	بلی	خیر	بلی
(ب)	بلی	خیر	بلی	بلی
(پ)	بلی	خیر	خیر	بلی

(ت)	بلی	خیر	خیر	خیر
(ث)	خیر	خیر	خیر	بلی
(ج)	بلی	بلی	بلی	خیر
(چ)	خیر		خیر	بلی

در (چ) ، در ستون دوم جای خالی گذارده‌ایم . دلیلش این است که قطعهٔ (a, b) به عنوان زیرمجموعه‌ای از R^2 باز نیست ، اما زیرمجموعهٔ بازی از R^1 خواهد بود .

۲۲۰۲ قضیه. فرض کنیم $\{E_\alpha\}$ *گردآیه‌ای (متناهی یا نامتناهی) از مجموعه‌های* E_α *باشد . در این صورت ،*

$$\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha (E_\alpha^c). \tag{20}$$

برهان. فرض کنیم A و B طرفهای چپ و راست (۲۰) باشند . هرگاه $x \in A$ ، آنگاه $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$. ازاینرو ، به‌ازای هر α ، $x \notin E_\alpha$. درنتیجه ، به‌ازای هر α ، $x \in E_\alpha^c$. پس $x \in \bigcap E_\alpha^c$. لذا ، $A \subset B$.

بعکس، هرگاه $x \in B$ ، آنگاه ، به ازای هر α ، $x \in E_\alpha^c$. ازاینرو ، به‌ازای هر α ، $x \notin E_\alpha$. درنتیجه ، $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$. پس $x \in (\bigcup_\alpha E_\alpha)^c$. لذا ، $B \subset A$.

بنابراین ، نتیجه می‌شود که $A = B$.

۲۳۰۲ قضیه. مجموعهٔ E *باز است اگر و فقط اگر متمم آن بسته باشد .*

برهان . ابتدا فرض می‌کنیم E^c بسته باشد . x ی در E اختیار می‌نماییم . پس $x \notin E^c$ ، و x یک نقطهٔ حدی E^c نیست . لذا ، یک همسایگی از x مانند N هست بطوری که $E^c \cap N$ تهی می‌باشد ، یعنی که $N \subset E$. بنابراین ، x یک نقطهٔ درونی E است ، و E باز می‌باشد .

اینک فرض می‌کنیم E باز باشد . x را یک نقطهٔ حدی E^c می‌گیریم . در این صورت ، هر همسایگی x نقطه‌ای از E^c را دارد . درنتیجه ، x یک نقطهٔ درونی E نیست . چون E باز است ، این یعنی که $x \in E^c$. از اینجا نتیجه می‌شود که E^c بسته می‌باشد .

نتیجه. مجموعهٔ F بسته است اگر و فقط اگر متمم آن باز باشد.

۲۴۰۲ قضیه

(آ) به‌ازای هر گردآیهٔ $\{G_\alpha\}$ از مجموعه‌های باز، $\bigcup_\alpha G_\alpha$ باز است.

(ب) به‌ازای هر گردآیهٔ $\{F_\alpha\}$ از مجموعه‌های بسته، $\bigcap_\alpha F_\alpha$ بسته است.

(پ) به‌ازای هرگردآیهٔ متناهی $G_1, \ldots, G_n$ از مجموعه‌های باز، $\bigcap_{i=1}^n G_i$ باز است

(ت) به‌ازای هر گردآیهٔ متناهی $F_1, \ldots, F_n$ ازمجموعه‌های‌بسته، $\bigcup_{i=1}^n F_i$ بسته خواهد بود.

برهان. قرار می‌دهیم $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$. گوییم هرگاه $x \in G$، آنگاه به‌ازای α ای $x \in G_\alpha$. چون x یک‌نقطهٔ درونی G_α است، پس x یک‌نقطهٔ درونی G نیز هست، و G بازمی‌باشد. این (آ) را ثابت خواهد کرد.

بنابر قضیهٔ ۲۲۰۲،

$$\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^c = \bigcup_\alpha (F_\alpha^c), \tag{21}$$

و F_α^c، مطابق قضیهٔ ۲۳۰۲، باز است. پس (آ) ایجاب می‌کند که (۲۱) باز باشد. درنتیجه $\bigcap_\alpha F_\alpha$، بسته خواهد بود.

حال قرار می‌دهیم $H = \bigcap_{i=1}^n G_i$. به‌ازای هر $x \in H$ همسایگیهایی از x مانند N_i با شعاعهای r_i وجود دارند بطوری که $N_i \subset G_i \; (i = 1, \ldots, n)$. قرارمی‌دهیم

$$r = \min (r_1, \ldots, r_n),$$

و N را همسایگی x به شعاع r می‌انگاریم. دراین صورت، به‌ازای هر $i = 1 \; \ldots, n$ خواهیم داشت $N \subset G_i$. درنتیجه $N \subset H$، و H باز می‌باشد.

با متممگیری، حکم (ت) از (پ) به دست خواهدآمد:

$$\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n (F_i^c).$$

۲۵۰۲ چند مثال. در قسمتهای (پ) و (ت) قضیهٔ پیش، متناهی بودن گردآیه‌ها ضروری‌است. چراکه‌فرض‌کنیم G_n قطعهٔ $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ باشد. در این صورت، G_n زیرمجموعهٔ بازی از R^1 است. قرار می‌دهیم $G = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$.

G از یک نقطه (یعنی، $x = 0$) تشکیل شده، و لذا، یک زیرمجموعهٔ باز R^1 نمی‌باشد.
بنابراین، اشتراک هر گردآیهٔ نامتناهی از مجموعه های باز الزاماً باز نیست.
بهمین نحو، اجتماع هر گردآیهٔ نامتناهی از مجموعه‌های بسته لزوماً بسته نخواهد بود.

۲۶۰۲ تعریف. هرگاه X یک فضای متری بوده، $E \subset X$، و E' مجموعهٔ تمام نقاط حدی E در X باشد، آنگاه بست E عبارت خواهد بود از مجموعهٔ $\bar{E} = E \cup E'$.

۲۷۰۲ قضیه. *هرگاه X یک فضای متری و $E \subset X$، آنگاه*
(آ) $\bar{E}$ بسته است؛
(ب) $E = \bar{E}$ اگر و فقط اگر E بسته باشد؛
(پ) به ازای هر مجموعهٔ بستهٔ $F \subset X$ که $E \subset F$ داریم $\bar{E} \subset F$.

بنابر (آ) و (پ)، $\bar{E}$ *کوچکترین زیرمجموعهٔ بستهٔ* X است که حاوی E می‌باشد.

برهان
(آ) هرگاه $p \in X$ و $p \notin \bar{E}$، p نه نقطه‌ای است از E و نه نقطهٔ حدی آن است. پس p همسایگیی دارد که E را قطع نمی‌کند. بنابراین، متمم $\bar{E}$ باز است. درنتیجه، $\bar{E}$ بسته خواهد بود.
(ب) هرگاه $E = \bar{E}$، (آ) ایجاب می‌کند که E بسته باشد. چنانچه E بسته باشد، [بنابر تعریفهای ۱۸۰۲ (ت) و ۲۶۰۲] $E' \subset E$؛ درنتیجه، $\bar{E} = E$.
(پ) هرگاه F بسته باشد و $F \supset E$، آنگاه $F \supset F'$، پس $F \supset E'$. بنابراین، $F \supset \bar{E}$.

۲۸۰۲ قضیه. *فرض کنیم E مجموعه‌ای باشد ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار است. قرار می‌دهیم $y = \sup E$. دراین صورت، $y \in \bar{E}$. لذا، اگر E بسته باشد، $y \in E$.*

این قضیه را با مثالهای بخش ۹۰۱ مقایسه کنید.

برهان. هرگاه $y \in E$، آنگاه $y \in \bar{E}$. فرض کنیم $y \notin E$. در این صورت، به ازای هر $h > 0$ نقطه‌ای مانند $x \in E$ هست که $y - h < x < y$، زیرا، در غیر این صورت، $y - h$ یک کران بالایی E خواهد بود. لذا، y یک نقطهٔ حدی E می‌باشد. بنابراین، $y \in \bar{E}$.

۲۹۰۲ تبصره. فرض‌کنیم $E \subset Y \subset X$ که در آن X یک فضای متری است. اینکه می‌گوییم E یک زیرمجموعهٔ باز X است یعنی که به هر نقطهٔ $p \in E$ عدد مثبتی مانند r چنان مربوط شده که شرطهای $d(p,q) < r$ و $q \in X$ عضویت q در E را ایجاب می‌کنند. اما قبلاً" دیده‌ایم (بخش ۱۶۰۲) که Y نیز یک فضای متری است. پس تعریفهای ما در Y نیز قابل‌بیان‌هستند. با صراحت کامل، می‌گوییم E **نسبت به** Y باز است اگر که به هر $p \in E$ عددی مانند $r > 0$ بقسمی مربوط شده باشد که هرگاه $d(p,q) < r$ و $q \in Y$، آنگاه $q \in E$. مثال ۲۱۰۲ (چ) نشان داد که‌یک مجموعه ممکن است، بی‌آنکه زیرمجموعهٔ بازی از X باشد، نسبت به Y بازشود. با اینحال، بین این مفاهیم رابطهٔ ساده‌ای وجود دارد که اینک به بیان آن می‌پردازیم.

۳۰۰۲ قضیه. فرض کنیم $Y \subset X$. ***زیرمجموعهٔ E از Y نسبت به Y باز است اگر و فقط اگر به‌ازای زیرمجموعهٔ بازی چون G از X، $E = Y \cap G$.***

برهان. فرض کنیم E نسبت به Y باز باشد. به‌ازای هر $p \in E$ عدد مثبتی مانند r_p هست بطوری که شرطهای $d(p,q) < r_p$ و $q \in Y$ عضویت q در E را ایجاب می‌کنند. فرض کنیم V_p مجموعهٔ تمام $q \in X$ هایی باشد که $d(p,q) < r_p$، و تعریف می‌کنیم

$$G = \bigcup_{p \in E} V_p.$$

در این صورت، بنابرقضایای ۱۹۰۲ و ۲۴۰۲، G زیر مجموعهٔ بازی از X می‌باشد.

چون به‌ازای هر $p \in E$، $p \in V_p$، پس واضح است که $E \subset G \cap Y$.

بنابر انتخاب ما از V_p، به‌ازای هر $p \in E$ داریم $V_p \cap Y \subset E$ درنتیجه، $G \cap Y \subset E$. لذا $E = G \cap Y$، و نیمی از قضیه ثابت می‌شود.

بعکس، هرگاه G در X باز باشد و $E = G \cap Y$، هر $p \in E$ یک همسایگی مانند $V_p \subset G$ خواهد داشت. پس $V_p \cap Y \subset E$. درنتیجه، E نسبت به Y باز می‌باشد.

مجموعه‌های فشرده

۳۱۰۲ تعریف. منظور از یک **پوشش باز** مجموعهٔ E در فضای متری X یعنی گردآیه‌ای از زیرمجموعه‌های باز X مانند $\{G_\alpha\}$ که $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.

۳۲۰۲ **تعریف** . زیر مجموعهٔ K از فضای متری X را **فشرده** نامند هرگاه هر پوشش باز K حاوی زیر پوششی **متناهی** باشد .

صریحتر بگوییم ، شرط فشردگی آن است که هرگاه $\{G_\alpha\}$ پوشش بازی از K باشد ، چند اندیس مانند $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ وجود دارد بطوری که

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}.$$

مفهوم فشردگی در آنالیز ، بخصوص در ارتباط با پیوستگی (فصل ۴) ، از اهمیت بسیار برخوردار است .

واضح است که هر مجموعهٔ متناهی فشرده می‌باشد . وجود ردهٔ بزرگی از مجموعه‌های فشردهٔ نامتناهی در R^k از قضیهٔ ۴۱۰۲ نتیجه خواهد شد .

پیشتر دیدیم (در بخش ۲۹۰۲) که ، هرگاه $E \subset Y \subset X$، ممکن است E بدون باز بودنش نسبت به X نسبت به Y باز باشد. لذا ، خاصیت باز بودن E به فضایی که E در آن نشانیده شده بستگی دارد . همین مطلب در مورد بسته بودن نیز صادق است .

اما ، همانطورکه اینک خواهیم دید ، فشردگی رفتار بهتری دارد . برای تنظیم قضیهٔ بعدی ، موقتا" می‌گوییم : K در صورتی نسبت به X فشرده است که نیازهای تعریف ۳۲۰۲ برآورده شوند .

۳۳۰۲ قضیه . فرض کنیم $K \subset Y \subset X$. در این صورت ، K نسبت به X فشرده است اگر و فقط اگر K نسبت به Y فشرده باشد .

در پرتو این قضیه است که در بسیاری مواقع می‌توان مجموعه‌های فشرده را خود فضاهایی متری گرفته ، به فضایی که این مجموعه‌ها در آن نشانیده شده‌اند وقعی نگذاشت . بویژه ، باآنکه سخن از فضاهای **باز** یا فضاهای **بسته** معنی چندانی ندارد (هر فضای متری X زیر مجموعهٔ باز و زیر مجموعهٔ بستهٔ خویش است) ، اما صحبت از فضاهای متری **فشرده** با معنی خواهد بود .

برهان . فرض کنیم K نسبت به X فشرده باشد ، و $\{V_\alpha\}$ یک گردآیه از مجموعه‌هایی باشد که نسبت به Y بازند با این خاصیت که $K \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$. بنابرقضیهٔ ۳۰۰۲ ، مجموعه‌هایی چون G_α هستند که نسبت به X بازند و بازای هر α، $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$ و چون K نسبت به

X فشرده است، به‌ازای تعدادی متناهی اندیس مانند $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ داریم

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}. \tag{22}$$

از آنجا که $K \subset Y$، از (۲۲) نتیجه می‌شود که

$$K \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}. \tag{23}$$

این ثابت می‌کند که K نسبت به Y فشرده می‌باشد.

بعکس، فرض‌کنیم K نسبت به Y فشرده بوده، $\{G_\alpha\}$ گردآیه‌ای از زیرمجموعه‌های باز X باشد که K را می‌پوشانند، و قرار می‌دهیم $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$. در این صورت، به ازای $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ی، (۲۳) برقرار می‌شود. و چون $V_\alpha \subset G_\alpha$، (۲۳) رابطهٔ (۲۲) را ایجاب می‌نماید.

این برهان را تمام خواهد کرد.

۲۴۰۲ قضیه. زیرمجموعه‌های فشردهٔ فضاهای متری بسته‌اند.

برهان. فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ فضای متری X باشد. ثابت می‌کنیم متمم K زیرمجموعهٔ بازی از X است.

فرض‌کنیم $p \in X$ و $p \notin K$. چنانچه $q \in K$، V_q و W_q را بترتیب همسایگیهایی از p و q می‌انگاریم که شعاعشان از $\frac{1}{2}d(p, q)$ کمتر است [ر.ک. تعریف ۱۸۰۲ (آ)]. چون K فشرده است، تعدادی متناهی نقطه در K مانند $q_1, \ldots, q_n$ وجود دارند بطوری‌که

$$K \subset W_{q_1} \cup \cdots \cup W_{q_n} = W.$$

هرگاه $V = V_{q_1} \cap \cdots \cap V_{q_n}$، آنگاه V یک همسایگی p است که W را قطع نمی‌کند. بنابراین، $V \subset K^c$. درنتیجه، p یک نقطهٔ درونی K^c می‌باشد. از این قضیه نتیجه خواهد شد.

۲۵۰۲ قضیه. زیرمجموعه‌های بستهٔ مجموعه‌های فشرده فشرده‌اند.

برهان. فرض کنیم $F \subset K \subset X$، F بسته (نسبت به X)، و K فشرده باشد. همچنین، $\{V_\alpha\}$ را یک پوشش باز F می‌انگاریم. با الحاق F^c به $\{V_\alpha\}$، به پوشش باز Ω از K دست می‌یابیم. چون K فشرده است، زیر گردآیه‌ای متناهی از Ω مانند Φ هست که K، و درنتیجه، F را می‌پوشاند. هرگاه F^c عضوی از Φ باشد، با حذف آن هنوز

Φ می‌تواند یک پوشش باز F بماند. پس نشان داده‌ایم که یک زیرگردآیهٔ متناهی از $\{V_\alpha\}$، F را خواهد پوشاند.

نتیجه. هرگاه F بسته و K فشرده باشد، آنگاه $F \cap K$ فشرده است.

برهان. قضایای ۲۴۰۲ (ب) و ۳۴۰۲ نشان می‌دهند که $F \cap K$ بسته است. چون $F \cap K \subset K$، قضیهٔ ۳۵۰۲ نشان خواهد داد که $F \cap K$ فشرده می‌باشد.

۳۶۰۲ قضیه. هرگاه $\{K_\alpha\}$ گردآیه‌ای از زیرمجموعه‌های فشردهٔ فضای متری X باشد بطوری که اشتراک هر زیرگردآیهٔ متناهی آن ناتهی باشد، آنگاه $\bigcap K_\alpha$ ناتهی خواهد بود.

برهان. عضو K_1 از $\{K_\alpha\}$ را ثابت گرفته قرار می‌دهیم $G_\alpha = K_\alpha^c$. فرض کنیم هیچ نقطه‌ای از K_1 متعلق به هر K_α نباشد. در این صورت، مجموعه‌های G_α یک پوشش باز K_1 را می‌سازند. و چون K_1 فشرده‌است، تعدادی متناهی اندیس‌مانند $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ هستند بطوری که $K_1 \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$. اما این یعنی

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \cdots \cap K_{\alpha_n}$$

تهی است، که با فرض ما تعارض دارد.

نتیجه. هرگاه $\{K_n\}$ چنان دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده و ناتهی باشد که $K_n \supset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$، آنگاه $\bigcap_1^\infty K_n$ تهی نخواهد بود.

۳۷۰۲ قضیه. هرگاه E یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از مجموعهٔ فشردهٔ K باشد، آنگاه E یک نقطهٔ حدی در K دارد.

برهان. اگر هیچ نقطه از K نقطهٔ حدی E نمی‌بود، هر $q \in K$ همسایگی چون V_q می‌داشت که شامل حداکثر یک نقطه از E (یعنی q، اگر $q \in E$) باشد. واضح است که هیچ زیرگردآیهٔ متناهی از $\{V_q\}$ قادر به پوشاندن E نیست، و همین مطلب، به دلیل اینکه $E \subset K$، برای K صادق است. این ناقض فشردگی K می‌باشد.

۳۸۰۲ قضیه. هرگاه $\{I_n\}$ دنباله‌ای از بازه‌ها در R^1 باشد بطوری که $I_n \supset I_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$)، آنگاه $\bigcap_1^\infty I_n$ تهی نخواهد بود.

برهان. در صورت $I_n = [a_n, b_n]$، E را مجموعهٔ تمام a_n ها می‌انگاریم. پس E ناتهی و از بالا کراندار (به b_1) است. فرض کنیم x سوپرمم E باشد. هرگاه m و n اعداد صحیح مثبتی باشند، آنگاه

$$a_n \le a_{m+n} \le b_{m+n} \le b_m.$$

در نتیجه، به ازای هر m، $x \le b_m$. چون واضح است که $a_m \le x$، ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر $m = 1, 2, 3, \ldots$، $x \in I_m$.

۳۹۰۲ قضیه. فرض کنیم k عدد صحیح مثبتی باشد. هرگاه $\{I_n\}$ دنباله‌ای از حجره‌های k بعدی باشد بطوری که $I_n \supset I_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$)، آنگاه $\bigcap_1^\infty I_n$ تهی نخواهد بود.

برهان. فرض کنیم I_n از تمام نقاطی چون $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ تشکیل شده که

$$a_{n,j} \le x_j \le b_{n,j} \qquad (1 \le j \le k; n = 1, 2, 3, \ldots),$$

و قرار می‌دهیم $I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}]$. به ازای هر j، دنبالهٔ $\{I_{n,j}\}$ در مفروضات قضیهٔ ۳۸۰۲ صدق می‌کند. پس اعدادی حقیقی مانند $x_j^*(1 \le j \le k)$ هستند بقسمی که

$$a_{n,j} \le x_j^* \le b_{n,j} \qquad (1 \le j \le k; n = 1, 2, 3, \ldots).$$

باقرار $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$، می‌بینیم که به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، $\mathbf{x}^* \in I_n$. از این، قضیه نتیجه خواهد شد.

۴۰۰۲ قضیه. هر حجرهٔ k بعدی فشرده است.

برهان. فرض کنیم I حجره‌ای k بعدی مرکب از تمام نقاطی چون $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ باشد که $a_j \le x_j \le b_j$ $(1 \le j \le k)$. قرار می‌دهیم

$$\delta = \left\{\sum_1^k (b_j - a_j)^2\right\}^{1/2}$$

در این صورت ، اگر $\mathbf{x} \in I$ و $\mathbf{y} \in I$ ، $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le \delta$.

فرض کنیم (برای به دست آوردن تناقض) پوشش بازی چون $\{G_\alpha\}$ از I وجود دارد که حاوی زیرپوششی متناهی از I نیست. قرار می‌دهیم $c_j = (a_j + b_j)/2$. در این صورت ، بازه‌های $[a_j, c_j]$ و $[c_j, b_j]$ ، 2^k حجرهٔ k بعدی Q_i را مشخص می‌کنند که اجتماعشان I است. دست کم یکی از این Q_i ها (آن را I_1 می‌نامیم) با هیچ زیرگردآیه‌ای متناهی از $\{G_\alpha\}$ پوشیده نمی‌شود (در غیر این صورت ، I را نیز می‌شد به همین نحو پوشانید) . بعد I_1 را تقسیم کرده عمل را ادامه می‌دهیم. با این کار ، دنباله‌ای مانند $\{I_n\}$ با خواص زیر خواهیم داشت :

(آ) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$؛

(ب) I_n با هیچیک از زیرگردآیه‌های متناهی $\{G_\alpha\}$ پوشیده نمی‌شود؛

(پ) هرگاه $\mathbf{x} \in I_n$ و $\mathbf{y} \in I_n$ ، آنگاه $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le 2^{-n}\delta$.

بنابر (آ) و قضیهٔ ۳۹۰۲ ، نقطه‌ای مانند $\mathbf{x}^*$ هست که در هر I_n جای دارد. به ازای α ای $\mathbf{x}^* \in G_\alpha$. چون G_α باز است ، عددی مانند $r > 0$ وجود دارد که $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*| < r$ عضویت $\mathbf{y}$ در G_α راایجاب می‌کند. هرگاه n آنقدر بزرگ باشد که $2^{-n}\delta < r$ (چنین n ی وجود دارد ، زیرا در غیر این‌صورت ، به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، $2^n \le \delta/r$ ، که بخاطر ارشمیدسی بودن R بی معنی است) ، آنگاه (پ) رابطهٔ $I_n \subset G_\alpha$ را ایجاب می‌کند ، که ناقض (ب) می‌باشد.

این برهان را تمام خواهد کرد.

معادل بودن (آ) و (ب) در قضیهٔ بعدی به **قضیهٔ هاینه ــ برل**[1] معروف شده است.

۴۱۰۲ قضیه. *هرگاه مجموعهٔ E در R^k یکی از سه خاصیت زیر را داشته باشد ، آنگاه از دو خاصیت دیگر نیز بهره‌مند است :*

(آ) E بسته و کراندار است؛

1. Heine–Borel

(ب) E فشرده است؛

(پ) هر زیرمجموعهٔ نامتناهی E یک نقطهٔ حدی در E دارد.

برهان. هرگاه (آ) برقرار باشد، آنگاه به ازای حجره‌ای k بعدی چون I ، $E \subset I$ ، و (ب) از قضایای ۴۰۰۲ و ۳۵۰۲ نتیجه خواهد شد. قضیهٔ ۳۷۰۲ نشان می‌دهد که (ب) شرط (پ) را ایجاب می‌کند. باقی می‌ماند نشان دادن اینکه (آ) از (پ) نتیجه می‌شود.

گوییم هرگاه E کراندار نباشد، E حاوی نقاطی است چون $\mathbf{x}_n$ با خاصیت

$$|\mathbf{x}_n| > n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

مجموعهٔ S متشکل از این $\mathbf{x}_n$ ها نامتناهی است، وبوضوح نقطه‌ای حدی در R^k ، ودر نتیجه، در E ندارد. لذا، (پ) ایجاب می‌کند که E کراندار باشد.

هرگاه E بسته نباشد، آنگاه نقطه‌ای مانند $\mathbf{x}_0 \in R^k$ هست که نقطهٔ حدی E بوده ولی نقطه‌ای از E نمی‌باشد. به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، نقاطی چون $\mathbf{x}_n \in E$ وجود دارند بطوری که $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| < 1/n$. فرض کنیم S مجموعهٔ این $\mathbf{x}_n$ ها باشد. پس S نامتناهی است (در غیر این صورت، $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|$ به‌ازای بی‌نهایت n مقدار ثابت مثبتی خواهد داشت)، $\mathbf{x}_0$ نقطهٔ حدی S است، و S نقطهٔ حدی دیگری در R^k ندارد. زیرا، هرگاه $\mathbf{y} \in R^k$ و $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}_0$ ، آنگاه به ازای کلیهٔ n ها جز تعدادی متناهی

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_n - \mathbf{y}| &\geq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| \\ &\geq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\mathbf{y}$ یک نقطهٔ حدی S نیست (قضیهٔ ۲۰۰۲).

بنابراین، S در E نقطهٔ حدی ندارد. درنتیجه، E در صورت برقرار بودن (پ) باید بسته باشد.

در این مرحله باید قید کنیم که (ب) و (پ) در هر فضای متری معادلند (تمرین ۲۶)، لکن (آ) در حالت کلی (ب) و (پ) را ایجاب نخواهد کرد. تمرین ۱۶ وفضای $\mathscr{L}^2$ (که در فصل ۱۱ مطرح شده) نمونه‌هایی را به دست می‌دهند.

۴۲۰۲ قضیه (وایراشتراس [1]). هرزیرمجموعهٔ نامتناهی و کراندار R^k یک نقطهٔ

---

1. Weierstrass

حدی در R^k دارد.

برهان. مجموعهٔ E ی مورد بحث، به دلیل کراندار بودنش، زیرمجموعه‌ای از یک حجرهٔ k بعدی مانند $I \subset R^k$ است. بنابرقضیهٔ ۴۰۰۲، I فشرده است، وازاینرو، بنابرقضیهٔ ۳۷۰۲، یک نقطهٔ حدی در I خواهد داشت.

مجموعه های کامل

۴۳۰۲ قضیه. *فرض‌کنیم P یک مجموعهٔ کامل ناتهی در R^k باشد. در این صورت، P شمارش ناپذیر است.*

برهان. چون P نقاط‌حدی‌دارد، پس‌باید نامتناهی باشد. فرض کنیم P شمارشپذیرباشد، و نقاطش را با $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots$ می‌نمایانیم. دنبالهٔ $\{V_n\}$ از همسایگیها رابه صورت زیر می‌سازیم:

فرض‌می‌کنیم V_1 یکی‌ازهمسایگیهای $\mathbf{x}_1$ باشد. هرگاه V_1 از تمام $\mathbf{y} \in R^k$ هایی متشکل باشد که $|\mathbf{y}-\mathbf{x}_1| < r$، بست $\bar{V}_1$ از V_1 مجموعهٔ تمام $\mathbf{y}$ هایی از R^k است که $|\mathbf{y}-\mathbf{x}_1| \le r$.

فرض‌می‌کنیم V_n ساخته‌شده‌است‌بطوری‌که $V_n \cap P$ تهی نمی‌باشد. چون هرنقطهٔ P یک‌نقطهٔ حدی P است، همسایگیی چون V_{n+1} وجود دارد که (یک) $\bar{V}_{n+1} \subset V_n$، (دو) $\mathbf{x}_n \notin \bar{V}_{n+1}$، و (سه) $V_{n+1} \cap P$ تهی نیست. بنابر (سه)، V_{n+1} در فرض استقرای ما صدق می‌کند، و این ساختن می‌تواند ادامه یابد.

قرارمی‌دهیم $K_n = \bar{V}_n \cap P$. چون $\bar{V}_n$ بسته‌وکراندار است، $\bar{V}_n$ فشرده می‌باشد. وازآنجا که $\mathbf{x}_n \notin K_{n+1}$، هیچ نقطهٔ P در $\bigcap_1^\infty K_n$ قرار ندارد. این، بخاطر $K_n \subset P$، ایجاب می‌کند که $\bigcap_1^\infty K_n$ تهی باشد. اما، بنابر (سه)، هر K_n ناتهی است و، طبق (یک)، $K_n \supset K_{n+1}$. این با نتیجهٔ قضیهٔ ۳۶۰۲ تعارض خواهد داشت.

نتیجه. *هربازهٔ $[a, b]$ $(a < b)$ شمارش‌ناپذیراست. بخصوص، مجموعهٔ تمام‌اعداد حقیقی شمارش ناپذیر می‌باشد.*

۴۴۰۲ مجموعهٔ کانتور. مجموعه‌ای‌که هم اینک خواهیم‌ساخت‌نشان می‌دهد که‌مجموعه‌

های کاملی در R^1 هستند که شامل هیچ قطعه‌ای نمی‌باشند.

فرض کنیم E_0 بازهٔ $[0, 1]$ باشد. از آن قطعهٔ $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ را برداشته، E_1 را اجتماع بازه‌های

$$[0, \tfrac{1}{3}], [\tfrac{2}{3}, 1]$$

می‌گیریم. یکسوم میانی این بازه‌ها را برداشته، E_2 را اجتماع بازه‌های

$$[0, \tfrac{1}{9}], [\tfrac{2}{9}, \tfrac{3}{9}], [\tfrac{6}{9}, \tfrac{7}{9}], [\tfrac{8}{9}, 1]$$

می‌انگاریم. باادامهٔ این‌کار، دنباله‌ای از مجموعه‌های فشردهٔ E_n خواهیم داشت‌بطوری که

(آ) $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$؛

(ب) E_n اجتماع 2^n بازه است هر یک به طول 3^{-n}.

مجموعهٔ

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

مجموعهٔ **کانتور** نام دارد. P بوضوح‌فشرده‌است، و قضیهٔ ۳۶.۲ نشان می‌دهد که P تهی نیست.

هیچ قطعه‌ای به شکل

$$\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right), \tag{24}$$

که در آن k و m اعداد صحیح مثبتی باشند، با P نقطهٔ مشترک نـدارد. چون هر قطعهٔ (α, β) حاوی قطعه‌ای به شکل (۲۴) است، اگر

$$3^{-m} < \frac{\beta - \alpha}{6},$$

P هیچ قطعه‌ای را در بر نخواهد داشت.

برای‌اثبات‌کامل‌بودن P کافی‌است نشان دهیم که P شامل نقطهٔ تنها نیست. فرض کنیم $x \in P$، و S قطعهٔ دلخواهی شامل x باشد. همچنین، I_n آن بازه از E_n باشد که x را دربردارد. n راآنقدربزرگ می‌گیریم که $I_n \subset S$. فرض کنیم x_n یک نقطهٔ انتهایی I_n باشد بطوری که $x_n \neq x$.

از نحوهٔ ساختن P معلوم می‌شود که $x_n \in P$. لذا، x یک نقطهٔ حدی P است، و P کامل خواهد بود.

یکی از جالبترین خواص مجموعهٔ کانتور این است که نمونه‌ای از یک مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر از اندازهٔ صفر (مفهوم اندازه در فصل ۱۱ مطرح می‌شود) را به ما می‌دهد.

مجموعه های همبند

۴۵۰۲ تعریف. دو زیرمجموعهٔ A و B از فضای متری X را *از هم جدا شده* نامند هرگاه هم $A \cap \bar{B}$ تهی باشد و هم $\bar{A} \cap B$؛ یعنی، هیچ نقطهٔ A در بست B و هیچ نقطهٔ B در بست A قرار نگیرد.

مجموعهٔ $E \subset X$ *همبند* گفته می‌شود هرگاه E اجتماع دو مجموعهٔ از هم جدا شدهٔ ناتهی *نباشد*.

۴۶۰۲ تبصره. شکی نیست که مجموعه‌های از هم جدا شده از هم جدا هستند، لیکن مجموعه‌های از هم جدا لزوماً" از هم جدا شده نمی‌باشند. مثلاً"، بازهٔ $[0, 1]$ وقطعهٔ $(1 , 2)$، به این دلیل که 1 نقطهٔ حدی $(1 , 2)$ است، از هم جدا شده **نیستند**. اما قطعه‌های $(0 , 1)$ و $(1 , 2)$ از هم جدا شده **می‌باشند**.

زیرمجموعه‌های همبند خط از نهاد سادهٔ خاصی برخوردارند:

۴۷۰۲ قضیه. زیرمجموعهٔ E *از خط حقیقی* R^1 *همبند است اگر و فقط اگر این خاصیت را داشته باشد: هرگاه* $x \in E$، $y \in E$، و $x < z < y$، آنگاه $z \in E$.

برهان. هرگاه $x \in E$، $y \in E$، و z ی در (x, y) وجود داشته باشد بطوری که $z \notin E$، آنگاه $E = A_z \cup B_z$ که در آن

$$A_z = E \cap (-\infty, z), \qquad B_z = E \cap (z, \infty).$$

چون $x \in A_z$ و $y \in B_z$، A_z و B_z ناتهی هستند. و از آنجا که $A_z \subset (-\infty, z)$ و $B_z \subset (z, \infty)$، اینها از هم جدا شده می‌باشند. پس E همبند نمی‌باشد.

برای اثبات عکس، فرض می‌کنیم E همبند نباشد. در این صورت، مجموعه‌هایی از هم جدا شده و ناتهی مانند A و B هستند بطوری که $A \cup B = E$، x ی در A و y ی در B اختیار، و (بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود) فرض می‌کنیم $x < y$. تعریف می‌کنیم

$$z = \sup (A \cap [x, y]).$$

بنابر قضیهٔ ۲۸۰۲، $z \in \bar{A}$. پس $z \notin B$. بخصوص، $x \le z < y$.

هرگاه $z \notin A$ ، نتیجه می‌شود که $x < z < y$ و $z \notin E$.

هرگاه $z \in A$ ، آنگاه $z \notin \bar{B}$. درنتیجه، z_1 ی هست که $z < z_1 < y$ و $z_1 \notin B$. پس $x < z_1 < y$ و $z_1 \notin E$.

تمرین

۱ . ثابت کنید مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه است.

۲ . عدد مختلط z را **جبری** نامند هرگاه اعداد صحیحی چون $a_0, \dots, a_n$ ، که همه صفر نیستند، وجود داشته باشند بطوری که

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

ثابت کنید مجموعهٔ تمام اعداد جبری شمارشپذیر است. ***راهنمایی***: به ازای هرعدد صحیح و مثبت N ، فقط تعدادی متناهی معادله هست که در آنها

$$n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = N.$$

۳ . ثابت کنید اعدادی حقیقی وجود دارند که جبری نیستند.

۴ . آیا مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی گنگ شمارشپذیر است؟

۵ . مجموعه‌ای کراندار از اعداد حقیقی بسازید که درست سه نقطهٔ حدی داشته‌باشد.

۶ . فرض کنید E' مجموعهٔ تمام نقاط حدی مجموعهٔ E باشد. ثابت کنید E' بسته است. ثابت‌کنید نقاط حدی E و $\bar{E}$ یکی است. (به یاد بیاورید که $\bar{E} = E \cup E'$.) آیا نقاط حدی E و E' همیشه یکی است؟

۷ . فرض کنید $A_1, A_2, A_3, \dots$ زیرمجموعه‌هایی از یک فضای متری باشند.

(آ) هرگاه $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ، ثابت کنید به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ ، $\bar{B}_n = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$.

(ب) چنانچه $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ، ثابت کنید $\bar{B} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$.

با یک مثال نشان دهید که این شمول می‌تواند حقیقی باشد.

۸ . آیا هر نقطه از مجموعهٔ باز $E \subset R^2$ یک نقطهٔ حدی آن است؟ به همین سؤال در مورد مجموعه‌های بسته در R^2 پاسخ دهید.

۹ . فرض کنید E° مجموعهٔ تمام نقاط درونی E باشد. [ر.ک. تعریف ۱۸۰۲ (ث): E° را **درون** E نام داده‌اند.]

(آ) ثابت کنید E° همیشه باز است ؛

(ب) ثابت کنید E باز است اگر و فقط اگر $E^\circ = E$ ؛

(پ) هرگاه $G \subset E$ و G باز باشد ، ثابت کنید $G \subset E^\circ$.

(ت) ثابت کنید متمم E° بست متمم E است .

(ث) آیا درون E و $\bar{E}$ همیشه یکی است ؟

(ج) آیا بست E و E° همواره یکی است ؟

۱۰ . فرض کنید X یک مجموعهٔ نامتناهی باشد . $d(p,q)$ را ، به ازای $p \in X$ و $q \in X$ ، این طور تعریف کنید :

$$d(p,q) = \begin{cases} 1 & (\text{اگر } p \neq q), \\ 0 & (\text{اگر } p = q). \end{cases}$$

ثابت کنید این یک متر است . چه زیرمجموعه‌هایی از فضای متری حاصل بازند ؟ کدامها بسته‌اند ؟ چه مجموعه‌هایی فشرده می‌باشند ؟

۱۱ . به ازای $x \in R^1$ و $y \in R^1$ ، تعریف کنید

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= (x-y)^2, \\ d_2(x,y) &= \sqrt{|x-y|}, \\ d_3(x,y) &= |x^2-y^2|, \\ d_4(x,y) &= |x-2y|, \\ d_5(x,y) &= \frac{|x-y|}{1+|x-y|}. \end{aligned}$$

در مورد هر یک از اینها مشخص کنید آیا یک متر هست یا نه .

۱۲ . فرض کنید $K \subset R^1$ از 0 و عددهای $1/n$ ، به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، تشکیل شده باشد . مستقیماً از تعریف (بدون استفاده از قضیهٔ هاینه ـ برل) ثابت کنید که K فشرده است .

۱۳ . مجموعهٔ فشرده‌ای از اعداد حقیقی بسازید که نقاط حدی آن مجموعهٔ شمارشپذیری تشکیل دهند .

۱۴ . پوشش بازی از قطعهٔ $(0, 1)$ مثال بزنید که زیرپوششی متناهی نداشته باشد .

۱۵ . نشان دهید که اگر واژهٔ "فشرده" را با "بسته" یا "کراندار" عوض کنیم ، قضیهٔ

۳۶۰۲ و نتیجهٔ آن (مثلاً ، در R^1) درست نخواهند بود .

۱۶ . Q ، یعنی مجموعهٔ تمام اعداد گویا ، را به عنوان یک فضای متری با متر $d(p,q)=|p-q|$ در نظر بگیرید . فرض کنید E مجموعهٔ تمام p هایی در Q باشد که $2<p^2<3$. نشان دهید که E در Q بسته و کراندار است ، ولی فشرده نیست . آیا E در Q باز است ؟

۱۷ . فرض کنید E مجموعهٔ تمام x هایی در $[0,1]$ باشد که بسط اعشاری آنها فقط شامل ارقام 4 و 7 است . آیا E شمارشپذیر است ؟ آیا E در $[0,1]$ چگال است ؟ آیا E فشرده است ؟ آیا E کامل است ؟

۱۸ . آیا در R^1 مجموعه‌ای کامل و ناتهی که شامل عدد گویایی نباشد وجود دارد ؟

۱۹ . (آ) هرگاه A و B مجموعه‌های بسته و از هم جدایی در فضای متری X باشند ، ثابت کنید این مجموعه‌ها از هم جدا شده‌اند .

(ب) همین مطلب را در مورد مجموعه‌های باز از هم جدا اثبات کنید .

(پ) $p\in X$ و $\delta>0$ را ثابت گرفته ، A را مجموعهٔ تمام q هایی در X تعریف کنید که به‌ازای آنها $d(p,q)<\delta$ ، B را به همین نحو ، با گذاردن $>$ به جای $<$ ، تعریف نمایید . ثابت کنید A و B از هم جدا شده‌اند .

(ت) ثابت کنید هر فضای متری همبند با حداقل دو نقطه شمارش ناپذیر است .

راهنمایی : قسمت (پ) را به کار برید .

۲۰ . آیا بست و درون مجموعه‌های همبند همیشه همبندند ؟ (زیرمجموعه‌های R^2 را نظاره کنید .)

۲۱ . فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های از هم جدا شدهٔ R^k ای باشند . همچنین ، $\mathbf{a}\in A, \mathbf{b}\in B$ ، و به ازای $t\in R^1$ تعریف کنید

$$\mathbf{p}(t)=(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}.$$

قرار دهید $A_0=\mathbf{p}^{-1}(A)$ و $B_0=\mathbf{p}^{-1}(B)$. [پس $t\in A_0$ اگر و فقط اگر $\mathbf{p}(t)\in A$.]

(آ) ثابت کنید A_0 و B_0 زیر مجموعه‌های از هم جدا شدهٔ R^1 اند .

(ب) ثابت کنید t_0 ی در $(0,1)$ هست بطوری که $\mathbf{p}(t_0)\notin A\cup B$.

(پ) ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ محدب R^k همبند است .

۲۲ . یک فضای متری را ***جدایی‌پذیر*** نامند هرگاه شامل زیرمجموعهٔ چگال شمارشپذیری

باشد. نشان دهید که R^k جدایی پذیر است. **راهنمایی**: مجموعهٔ نقاطی را در نظر بگیرید که فقط مختصات گویا داشته باشند.

۲۳. گردآیهٔ $\{V_\alpha\}$ از زیرمجموعه‌های باز X را یک **پایه** برای X نامند هرگاه گزارهٔ زیر راست باشد: برای هر $x \in X$ و هر مجموعهٔ باز $G \subset X$ که $x \in G$، α ای باشد که به‌ازای آن داشته باشیم $x \in V_\alpha \subset G$. به عبارت دیگر، هر مجموعهٔ باز در X اجتماع زیرگردآیه‌ای از $\{V_\alpha\}$ باشد.

ثابت کنید هر فضای متری جدایی پذیر پایه‌ای **شمارشپذیر** دارد. **راهنمایی**: تمام همسایگیهایی را اختیار کنید که شعاع هر یک گویا و مرکزش در یکی از زیرمجموعه‌های چگال شمارشپذیر X باشد.

۲۴. فرض کنید X یک فضای متری باشد که در آن هر زیرمجموعهٔ نامتناهی نقطه‌ای حدی دارد. ثابت کنید X جدایی پذیر است. **راهنمایی**: $\delta > 0$ ی را ثابت گرفته x_1 ی در X اختیار کنید. با اختیار $x_1, \ldots, x_j \in X$، x_{j+1} را در X، در صورت امکان، طوری بگیرید که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, j$، $d(x_i, x_{j+1}) \geq \delta$. نشان دهید که این عمل باید پس از چند مرحله متوقف شود، و از این‌رو X را می‌توان با تعدادی متناهی همسایگی به شعاع δ پوشانید. δ را مساوی $1/n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) اختیارکرده مراکز همسایگیهای متناظر را در نظر بگیرید.

۲۵. ثابت کنید هر فضای متری فشردهٔ K پایه‌ای شمارشپذیر داشته، در نتیجه، جدایی‌ـ پذیر است. **راهنمایی**: به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n، تعدادی متناهی همسایگی به شعاع $1/n$ هست که اجتماع آنها K را می‌پوشاند.

۲۶. فرض کنید X فضایی متری باشد که در آن هر زیرمجموعهٔ نامتناهی نقطه‌ای حدی دارد. ثابت کنید X فشرده است. **راهنمایی**: بنابر تمرینهای ۲۳ و ۲۴، X پایه‌ای شمارشپذیر دارد. از این نتیجه می‌شود که هر پوشش باز X یک زیرپوشش **شمارش‌ـ پذیر** مانند $\{G_n\}$، $n = 1, 2, 3, \ldots$، خواهد داشت. هرگاه هیچ زیرگردآیهٔ متناهی $\{G_n\}$، X را نپوشاند، آنگاه متمم $G_1 \cup \cdots \cup G_n$ (به نام F_n) به‌ازای هر n ناتهی است، لیکن $\bigcap F_n$ تهی می‌باشد. هرگاه مجموعهٔ E از هر F_n نقطه‌ای داشته باشد، با توجه به یکی از نقاط حدی E تناقضی به دست آورید.

۲۷. نقطهٔ p در فضای متری X را یک **نقطهٔ تراکم** مجموعهٔ $E \subset X$ نامند هرگاه هر همسایگی p تعداد شمارش ناپذیری نقطه از E را داشته باشد.

فرض کنید $E \subset R^k$، E شمارش‌ناپذیر، و P مجموعهٔ تمام نقاط تراکم E باشد. ثابت

کنید P کامل است ، و تعدادی حداکثر شمارشپذیر از نقاط E در P نیست . به عبارت دیگر ، نشان دهید که $P^c \cap E$ حداکثر شمارشپذیر می‌باشد . ***راهنمایی :*** $\{V_n\}$ را پایهٔ شمارشپذیری از R^k انگاشته ، فرض کنید W اجتماع آن V_n هایی باشد که به‌ازای آنها $E \cap V_n$ حداکثر شمارشپذیر است ، و نشان دهید که $P = W^c$.

۲۸ . ثابت کنید هر مجموعهٔ بسته در یک فضای متری جدایی‌پذیر اجتماع مجموعه‌ای کامل (احتمالاً تهی) و مجموعه‌ای حداکثر شمارشپذیر است . (**نتیجه :** هر مجموعهٔ بستهٔ شمارشپذیر در R^k نقاط تنها دارد.) ***راهنمایی :*** تمرین ۲۷ را به‌کار برید .

۲۹ . ثابت کنید هر مجموعهٔ باز در R^1 اجتماع گردآیه‌ای حداکثر شمارشپذیر از قطعه‌های از هم جدا است . ***راهنمایی :*** از تمرین ۲۲ استفاده نمایید .

۳۰ . با تقلید از برهان قضیه ۴۳.۲ ، نتیجهٔ زیر را به دست آورید :

هرگاه $R^k = \bigcup_1^\infty F_n$ ، که در آن هر F_n زیرمجموعهٔ بسته‌ای از R^k است ، آنگاه دست‌کم یکی از F_n ها درون ناتهی دارد .

حکم معادل : هرگاه G_n ، به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، زیرمجموعهٔ باز چگالی از R^k باشد ، آنگاه $\bigcap_1^\infty G_n$ تهی نیست (درواقع ، در R^k چگال است) .

(این حالت خاصی است از قضیهٔ بئر[1] . برای حالت کلی ، ر.ک. تمرین ۲۲، فصل ۳ .)

---

1. Baire

۳
دنباله‌ها و سریهای عددی

چنانکه از عنوان بر می‌آید، این فصل عمدتاً به دنباله‌ها و سریهای اعداد مختلط خواهد پرداخت. با اینحال، مطالب اساسی همگرایی به همین سادگی درمحدودهٔ کلیتر توضیح داده می‌شوند. بدین لحاظ است که سه بخش اول به‌دنباله‌ها در فضاهای اقلیدسی یا حتی فضاهای متری اختصاص یافته‌اند.

دنباله‌های همگرا

۱۰۳ تعریف. دنبالهٔ $\{p_n\}$ در فضای متری X را **همگرا** نامند هرگاه نقطه‌ای مانند $p \in X$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد: به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی چون N باشد بطوری که $n \geq N$ نامساوی $d(p_n, p) < \varepsilon$ را ایجاب کند. (در اینجا d نشانگر فاصله در X است.)

در این وضع همچنین می‌گوییم $\{p_n\}$ همگرا به p است، یا که p حد $\{p_n\}$ می‌باشد [ر.ک. قضیهٔ ۲۰۳ (ب)]، و می‌نویسیم $p_n \to p$، یا

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

هرگاه $\{p_n\}$ همگرا نباشد، آن را **واگرا** خواهیم نامید.

خوب است خاطر نشان کنیم که تعریف ما از "دنبالهٔ همگرا" نه فقط به $\{p_n\}$ بلکه به X نیز بستگی دارد. مثلاً، دنبالهٔ $\{1/n\}$ در R^1 همگراست (به 0)، لکن در مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی مثبت [با متر $d(x, y) = |x - y|$] همگرا نیست. در حالاتی که امکان ابهام باشد، به جای گفتن "همگرا" می‌توان دقیقتر بود و تصریح کرد

"همگرا در X " .

یادآور شویم که مجموعهٔ تمام نقاط p_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) **برد** $\{p_n\}$ است . برد یک دنباله ممکن است مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی باشد . دنبالهٔ $\{p_n\}$ را در صورتی ***کراندار*** خوانیم که بردش کراندار باشد .

برای مثال ، دنباله‌های زیر از اعداد مختلط (یعنی ، $X = R^2$) را در نظر می‌گیریم :

(آ) هرگاه $s_n = 1/n$ ، آنگاه $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ ، بردش نامتناهی است،و دنباله کراندار می‌باشد ؛

(ب) هرگاه $s_n = n^2$ ، دنبالهٔ $\{s_n\}$ بی‌کران‌است ، واگراست ، و برد نامتناهی دارد ؛

(پ) چنانچه $s_n = 1 + [(-1)^n/n]$ ، دنبالهٔ $\{s_n\}$ همگرا بــه 1 است ، کراندار است، و برد نامتناهی دارد ؛

(ت) هرگاه $s_n = i^n$ ، دنبالهٔ $\{s_n\}$ واگرا ست ، کراندار است ، و برد متناهی‌دارد ؛

(ث) هرگاه $s_n = 1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) ، آنگاه $\{s_n\}$ همگرابه 1 است ، کراندار است ، و دارای برد متناهی می‌باشد .

حال بعضی از خواص مهم دنباله‌های همگرا در فضاهای متری را به‌اجمال ذکر می‌کنیم .

۲۰۳ قضیه . فرض کنیم ***$\{p_n\}$ دنباله‌ای در فضای متری X باشد .***

(آ) $\{p_n\}$ همگرا به $p \in X$ است اگر وفقط اگر هرهمسایگی p شامل تمام جملات $\{p_n\}$ جز تعدادی متناهی باشد .

(ب) هرگاه $p \in X$ ، $p' \in X$ ، و $\{p_n\}$ همگرا به p و p' باشد ، آنگاه $p' = p$.

(پ) هرگاه $\{p_n\}$ همگرا باشد ، آنگاه $\{p_n\}$ کراندار است .

(ت) هرگاه $E \subset X$ و p یک نقطهٔ حدی E باشد ، دنباله‌ای مانند $\{p_n\}$ در E هست بطوری که $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

برهان . (آ) فرض کنیم $p_n \to p$ ، و V یک همسایگی p باشد . بـه ازای ε مثبتی شرطهای $d(q, p) < \varepsilon$ و $q \in X$ عضویت q را در V ایجاب می‌کنند . نظیر این ε عدد صحیحی مانند N هست بطوری‌که $n \geq N$ نامساوی $d(p_n, p) < \varepsilon$ را نتیجه می‌دهد . بنابراین ، $n \geq N$ عضویت p_n در V را ایجاب خواهد کرد .

بعکس، فرض کنیم هر همسایگی p شامل تمام p_n ها جز تعدادی متناهی باشد. $\varepsilon > 0$ را ثابت گرفته، فرض می‌کنیم V مجموعهٔ تمام q هایی در X باشد که $d(p, q) < \varepsilon$. بنا به فرض، N ی (متناظر این V) هست بطوری که اگر $n \geq N$، $p_n \in V$. لذا، اگر $n \geq N$، $d(p_n, p) < \varepsilon$، بنابراین، $p_n \to p$.

(ب) فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت، N و N' صحیحی هستند بطوری که

$$d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{نامساوی} \quad n \geq N$$

و

$$d(p_n, p') < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{نامساوی} \quad n \geq N'$$

را ایجاب می‌کند. ازاینرو، اگر $n \geq \max(N, N')$، خواهیم داشت

$$d(p, p') \leq d(p, p_n) + d(p_n, p') < \varepsilon.$$

چون ε دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم که $d(p, p') = 0$.

(پ) فرض کنیم $p_n \to p$. پس عدد صحیحی مثل N هست بطوری که $n > N$ نامساوی $d(p_n, p) < 1$ را ایجاب می‌کند. قرار می‌دهیم

$$r = \max\{1, d(p_1, p), \ldots, d(p_N, p)\}.$$

پس، به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، $d(p_n, p) \leq r$.

(ت) به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n، نقطه‌ای مانند $p_n \in E$ هست بقسمی که $d(p_n, p) < 1/n$. هرگاه $\varepsilon > 0$ مفروض باشد، N را طوری می‌گیریم که $N\varepsilon > 1$. چنانچه $n > N$، نتیجه می‌شود که $d(p_n, p) < \varepsilon$. بنابراین، $p_n \to p$.

این برهان را تمام خواهد کرد.

برای دنباله‌های در R^k می‌توان رابطهٔ بین همگرایی، از یک سو، و اعمال جبری، از سوی دیگر، را بررسی نمود. ابتدا دنباله‌های اعداد مختلط را در نظر می‌گیریم.

۳۰۳ قضیه. فرض کنیم $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ **دنباله‌هایی مختلط بوده،** $\lim_{n\to\infty} s_n = s$، و $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. **در این صورت،**

(آ) $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = s + t$؛

(ب) **به‌ازای هر عدد** c، $\lim_{n\to\infty} cs_n = cs, \lim_{n\to\infty}(c + s_n) = c + s$؛

(پ) $\lim_{n\to\infty} s_n t_n = st$ ؛

(ت) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}$ مشروط براینکه $s_n \neq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ و $s \neq 0$.

برهـان

(آ) به ازای $\varepsilon > 0$ معلوم ،اعدادی صحیح مانند N_1 و N_2 هستند بطوری که

$n \geq N_1$ نامساوی $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$

و

$n \geq N_2$ نامساوی $|t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2}$

را ایجاب می‌کند . هرگاه $N = \max(N_1, N_2)$ ، آنگاه $n \geq N$ نتیجه می دهد که

$$|(s_n + t_n) - (s + t)| \leq |s_n - s| + |t_n - t| < \varepsilon.$$

این (آ) را ثابت خواهد کرد . اثبات (ب) بدیهی می‌باشد .

(پ) از اتحاد

$$s_n t_n - st = (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s) \tag{1}$$

استفاده می‌کنیم . به ازای $\varepsilon > 0$ معلوم ، اعداد صحیحی چون N_1 و N_2 هستند بطوری کـه

$n \geq N_1$ نامساوی $|s_n - s| < \sqrt{\varepsilon}$

و

$n \geq N_2$ نامساوی $|t_n - t| < \sqrt{\varepsilon}$

را ایجاب می‌کند . هرگاه فرض کنیم $N = \max(N_1, N_2)$ ، $n \geq N$ ایجاب خواهد کرد کـه

$$|(s_n - s)(t_n - t)| < \varepsilon,$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s)(t_n - t) = 0.$$

حال (آ) و (ب) را در (۱) به کار برده نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty} (s_n t_n - st) = 0.$$

(ت) m را طوری می‌گیریم که اگر $n \geq m$ ، $|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|$ ، و خواهیم دید که

$$|s_n| > \tfrac{1}{2}|s| \qquad (n \geq m).$$

به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، عدد صحیحی چون $N > m$ هست بقسمی که $n \geq N$ نامساوی

$$|s_n - s| < \tfrac{1}{2}|s|^2\varepsilon$$

را ایجاب می‌کند. بنابراین، به‌ازای $n \geq N$،

$$\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s_n - s}{s_n s}\right| < \frac{2}{|s|^2}|s_n - s| < \varepsilon.$$

۴۰۳ قضیه

(آ) فرض کنیم $\mathbf{x}_n \in R^k$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) و

$$\mathbf{x}_n = (\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{k,n}).$$

در این صورت، $\{\mathbf{x}_n\}$ همگرا به $\mathbf{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ است اگر و فقط اگر

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j \qquad (1 \leq j \leq k). \tag{2}$$

(ب) فرض کنیم $\{\mathbf{x}_n\}$ و $\{\mathbf{y}_n\}$، دنباله‌هایی در R^k بوده، $\{\beta_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد، و $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$، $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$، و $\beta_n \to \beta$. در این صورت،

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} + \mathbf{y} \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n \mathbf{x}_n = \beta\mathbf{x}.$$

برهان

(آ) هرگاه $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$، نامساویهای

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| \leq |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|,$$

که فوراً از تعریف نرم در R^k نتیجه می‌شوند، نشان می‌دهند که (۲) برقرار است.

بعکس، هرگاه (۲) برقرار باشد، آنگاه به هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مثل N چنان نظیر است که $n \geq N$ نامساویهای

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \qquad (1 \leq j \leq k)$$

را ایجاب می‌کند. ازاینرو، $n \geq N$ نتیجه می‌دهد که

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| = \left\{\sum_{j=1}^{k} |\alpha_{j,n} - \alpha_j|^2\right\}^{1/2} < \varepsilon.$$

پس $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$. این (آ) را ثابت می‌کند.

قسمت (ب) از (آ) و قضیهٔ ۳۰۳ نتیجه خواهد شد .

زیردنباله‌ها

۵۰۳ تعریف. با معلوم بودن دنبالهٔ $\{p_n\}$ ، دنبالهٔ $\{n_k\}$ از اعداد صحیح و مثبت را که $\cdots > n_1 < n_2 < n_3$ در نظر می‌گیریم . در این صورت ، دنبالهٔ $\{p_{n_i}\}$ را یک **زیر‌دنبالهٔ** $\{p_n\}$ می‌خوانیم . چنانچه $\{p_{n_i}\}$ همگرا باشد ، حد آن را یک **حد زیر‌دنباله‌ای** $\{p_n\}$ خواهیم نامید .

واضح است که $\{p_n\}$ همگرا به p است اگر و فقط اگر هر زیر دنبالهٔ $\{p_n\}$ همگرا به p باشد . جزئیات برهان را به خواننده وامی‌گذاریم .

۶۰۳ قضیه

(آ) هرگاه $\{p_n\}$ دنباله‌ای در فضای متری فشردهٔ X باشد ، آنگاه زیردنباله‌ای از $\{p_n\}$ به نقطه‌ای از X همگرا می‌باشد .

(ب) هر دنبالهٔ کراندار در R^k حاوی زیردنباله‌ای همگرا خواهد بود .

برهان

(آ) فرض کنیم E برد $\{p_n\}$ باشد . هرگاه E متناهی باشد ، نقطه‌ای مانند $p \in E$ و دنباله‌ای چون $\{n_i\}$ با خاصیت $\cdots > n_1 < n_2 < n_3$ هست بطوری که

$$p_{n_1} = p_{n_2} = \cdots = p.$$

واضح است که زیر دنبالهٔ $\{p_{n_i}\}$ به این نحو حاصل شده همگرا به p می‌باشد .

هرگاه E نامتناهی باشد ، قضیهٔ ۳۷۰۲ نشان می‌دهد که E یک نقطهٔ حدی مثل $p \in X$ دارد . n_1 را قسمی اختیار می‌کنیم که $d(p, p_{n_1}) < 1$. اگر $n_1, \ldots, n_{i-1}$ انتخاب شده باشند ، از قضیهٔ ۲۰۰۲ خواهیم دید که عدد صحیحی مانند $n_i > n_{i-1}$ هست بطوری که $d(p, p_{n_i}) < 1/i$. پس $\{p_{n_i}\}$ همگرا به p می‌باشد .

(ب) این قسمت از (آ) نتیجه می‌شود ، زیرا قضیهٔ ۴۱۰۲ ایجاب می‌کند که هر زیر‌مجموعهٔ کراندار R^k در زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از R^k جای دارد .

۷۰۳ قضیه. حدود زیردنباله‌ای دنبالهٔ $\{p_n\}$ در فضای متری X زیرمجموعهٔ بسته‌ای

از X را می‌سازند .

برهان. فرض کنیم E^* مجموعهٔ تمام حدود زیردنباله‌ای $\{p_n\}$ و q یک نقطهٔ حدی E^* باشد. باید نشان دهیم که $q \in E^*$.

n_1 را طوری می‌گیریم که $p_{n_1} \neq q$. (هرگاه چنین n_1 ی نباشد، E^* فقط یک نقطه دارد، و چیزی برای اثبات نمی‌ماند.) قرار می‌دهیم $\delta = d(q, p_{n_1})$. فرض کنیم $n_1, \ldots, n_{i-1}$ انتخاب شده‌باشند. چون q یک نقطهٔ حدی E^* است، پس x ی در E^* هست که $d(x,q) < 2^{-i}\delta$. و ازآنجاکه $x \in E^*$ ، n_i ی بزرگتر از n_{i-1} هست بقسمی که $d(x, p_{n_i}) < 2^{-i}\delta$. پس، به‌ازای $i = 1, 2, 3, \ldots$ ،

$$d(q, p_{n_i}) \leq 2^{1-i}\delta.$$

این می‌گوید که $\{p_{n_i}\}$ همگرا به q است. بنابراین، $q \in E^*$.

دنباله‌های کشی

۸۰۳ **تعریف.** دنبالهٔ $\{p_n\}$ در فضای متری X را یک **دنبالهٔ کشی** نامند هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی صحیح مانند N باشد بطوری که اگر $n \geq N$ و $m \geq N$ ، $d(p_n, p_m) < \varepsilon$.

مفهوم هندسی زیر در بحث ما از دنباله‌های کشی، و نیز در سایر مواردی که بعداً می‌آیند، مفید خواهد افتاد.

۹۰۳ **تعریف.** فرض کنیم E زیرمجموعه‌ای از فضای متری X، و S مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی $d(p, q)$ باشد که $p \in E$ و $q \in E$. در این صورت، سوپرمم S قطر E نامیده می‌شود.

چنانچه $\{p_n\}$ دنباله‌ای در X و E_N از نقاط p_N ، p_{N+1} ، p_{N+2} ، . . . متشکل باشد، از دو تعریف قبل معلوم می‌شود که $\{p_n\}$ **یک دنبالهٔ کشی است اگر و فقط اگر**

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{diam} E_N = 0 .$$

۱۰۰۳ **قضیه**

(آ) هرگاه $\bar{E}$ بست مجموعهٔ E در فضای متری X باشد، آنگاه

$$\operatorname{diam} \bar{E} = \operatorname{diam} E.$$

(ب) هرگاه K_n دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده در X باشد بطوری که $K_n \supset K_{n+1}$ ‏($n = 1, 2, 3, \ldots$)، و نیز

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam} K_n = 0,$$

آنگاه $\bigcap_1^\infty K_n$ فقط از یک نقطه تشکیل شده است .

برهان

(آ) چون $E \subset \bar{E}$ ، پس واضح است که

$$\operatorname{diam} E \leq \operatorname{diam} \bar{E}.$$

$\varepsilon > 0$ را ثابت گرفته، p و q را در $\bar{E}$ اختیار می‌کنیم . بنابر تعریف $\bar{E}$ ، نقاطی مانند p' و q' در E هستند بطوری که $d(p, p') < \varepsilon$ و $d(q, q') < \varepsilon$. ازاینرو،

$$\begin{aligned} d(p, q) &\leq d(p, p') + d(p', q') + d(q', q) \\ &< 2\varepsilon + d(p', q') \leq 2\varepsilon + \operatorname{diam} E. \end{aligned}$$

از این نتیجه می‌شود که

$$\operatorname{diam} \bar{E} \leq 2\varepsilon + \operatorname{diam} E.$$

و ، چون ε دلخواه بود، (آ) ثابت خواهد شد .

(ب) قرار می‌دهیم $K = \bigcap_1^\infty K_n$. K ، برطبق قضیهٔ ۳۶۰۲ ، تهی نیست . هرگاه K بیش از یک نقطه داشته باشد، آنگاه $\operatorname{diam} K > 0$. اما، به‌ازای هر n ، $K_n \supset K$. پس $\operatorname{diam} K_n \geq \operatorname{diam} K$. این با فرض $\operatorname{diam} K_n \to 0$ منافات دارد .

۱۱۰۳ قضیه

(آ) در هر فضای متری X ، هر دنبالهٔ همگرا یک دنبالهٔ کشی است .

(ب) هرگاه X یک فضای متری فشرده و $\{p_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در آن باشد، آنگاه $\{p_n\}$ به نقطه‌ای از X همگرا است .

(پ) در R^k ، هر دنبالهٔ کشی همگرا می‌باشد .

توجه : فرق بین تعریف همگرایی یک دنباله و تعریف کشی بودن آن در این است که در اولی صریحاً " حد دخالت دارد در حالی که در دومی چنین نمی‌باشد . از-

اینرو ،قضیهٔ ۱۱۰۳ (ب) ما را قادر می‌سازد تا در باب همگرا بودن یا نبودن یک دنبالهٔ معلوم بدون وقوف بر حد آن تصمیم بگیریم .

این مطلب (منتج از قضیــهٔ ۱۱۰۳) که "هر دنباله در R^k همگراست اگر و فقط اگر یک دنبالهٔ کشی باشد" معمولا" محک کشی برای همگرایی نام دارد .

برهان

(آ) هرگاه $p_n \to p$ و $\varepsilon > 0$ ، عــدد صحیحی مــانند N هست بطوری که به ازای هر $n \geq N$ ، $d(p, p_n) < \varepsilon$. بدینجهت ، بــه محض اینکه $n \geq N$ و $m \geq N$ ، خواهیم داشت

$$d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p) + d(p, p_m) < 2\varepsilon.$$

لذا ، $\{p_n\}$ یک دنبالهٔ کشی می‌باشد .

(ب) فرض کنیم $\{p_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در فضای فشردهٔ X باشد . همچنین ، به‌ازای $N = 1, 2, 3, \ldots,$ ، E_N را مجموعهٔ مرکب‌از p_N ، p_{N+1} ، p_{N+2} ، . . . می‌انگاریم . در این صورت ، بنابر تعریف ۹۰۳ و قضیهٔ ۱۰۰۳ (آ) ،

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{diam} \bar{E}_N = 0. \tag{3}$$

چون هر $\bar{E}_N$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از فضای‌فشردهٔ X است ، پس هر $\bar{E}_N$ فشرده می‌باشد (قضیهٔ ۳۵۰۲) . همچنین ، $E_N \supset E_{N+1}$ ، درنتیجه ، $\bar{E}_N \supset \bar{E}_{N+1}$.

حال قضیهٔ ۱۰۰۳ (ب) نشان می‌دهد که نقطهٔ منحصر بفردی مانند $p \in X$ هست که در هر $\bar{E}_N$ قرار دارد .

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شــده بــاشد . بنابر (۳) ، عدد صحیحی مثل N_0 هست بطوری کــه اگر $N \geq N_0$ ، $\operatorname{diam} \bar{E}_N < \varepsilon$. چون $p \in \bar{E}_N$ ، معلوم می‌شود که به‌ازای هر $q \in \bar{E}_N$ (درنتیجــه ، بــه ازای هــر $q \in E_N$) ، $d(p, q) < \varepsilon$. به‌عبارت دیگر ، هرگاه $n \geq N_0$ ، $d(p, p_n) < \varepsilon$. این دقیقا" می‌گوید که $p_n \to p$.

(پ) فرض کنیم $\{\mathbf{x}_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در R^k باشد . E_N را همانطور که در (ب) تعریف شد ، با گذاردن $\mathbf{x}_i$ به‌جای p_i ، تعریف می‌کنیم . به ازای Nی $\operatorname{diam} E_N < 1$. برد $\{\mathbf{x}_n\}$ اجتماع E_N و مجموعهٔ متناهی $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ است . پس $\{\mathbf{x}_n\}$ کراندار می‌باشد . چون هر زیر مجموعهٔ کراندار R^k بست فشرده در R^k دارد (قضیهٔ ۴۱۰۲) ، پس (پ) از (ب) نتیجه خواهد شد .

۱۲۰۳ تعریف. یک فضای متری که در آن هر دنبالهٔ کشی همگرا باشد **تام** نام دارد.

پس قضیهٔ ۱۱۰۳ این را می‌گوید که **تمام فضاهای متری فشرده و کلیهٔ فضاهای اقلیدسی تام هستند.** قضیهٔ ۱۱۰۳ همچنین ایجاب می‌کند که **هر زیرمجموعهٔ بستهٔ E از فضای متری تام X تام است.** (هر دنبالهٔ کشی در E یک دنبالهٔ کشی در X است؛ در نتیجه، به نقطه‌ای مانند $p \in X$ همگرا می‌باشد. و، چون E بسته است، این p عملاً در E خواهد بود.) یک نمونه از فضاهای متری غیرتام فضای کلیهٔ اعداد گویا با متر $d(x, y) = |x - y|$ می‌باشد.

قضیهٔ ۲۰۳ (پ) و مثال (ت) تعریف ۱۰۳ نشان می‌دهند که دنباله‌های همگرا کراندارند، لکن دنباله‌های کراندار در R^k لزوماً همگرا نمی‌باشند. بهرحال، حالت مهمی هست که در آن همگرایی معادل کرانداری *است*. این وضع در مورد دنباله‌های یکنوا در R^1 پیش خواهد آمد.

۱۳۰۳ تعریف. دنبالهٔ $\{s_n\}$ از اعداد حقیقی را

(آ) **صعودی** نامند هرگاه $s_n \le s_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$؛

(ب) **نزولی** خوانند هرگاه $s_n \ge s_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

ردهٔ دنباله‌های **یکنوا** از دنباله‌های صعودی و نزولی تشکیل شده است.

۱۴۰۳ قضیه. *فرض کنیم $\{s_n\}$ یکنوا باشد. در این صورت، $\{s_n\}$ همگراست اگر و فقط اگر کراندار باشد.*

برهان. فرض کنیم $s_n \le s_{n+1}$ (اثبات در حالت دیگر به همین نحو است). همچنین، E را برد $\{s_n\}$ می‌انگاریم. در صورت کراندار بودن $\{s_n\}$، s را کوچکترین کران بالایی E فرض می‌کنیم. در این صورت،

$$s_n \le s \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مثل N هست بطوری که

$$s - \varepsilon < s_N \le s;$$

زیرا، در غیر این صورت، $s - \varepsilon$ یک کران بالایی E خواهد بود. در نتیجه، چون $\{s_n\}$ صعودی است، $n \ge N$ ایجاب خواهد کرد که

$$s - \varepsilon < s_n \le s,$$

که همگرا بودن $\{s_n\}$ (به s) را نشان می‌دهد.
عکس مطلب از قضیهٔ ۲۰۳ (پ) نتیجه خواهد شد.

حدود بالایی و پایینی

۱۵۰۳ تعریف. فرض‌کنیم $\{s_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی با خاصیت زیر باشد: به ازای هر M حقیقی عددی صحیح مانند N باشد بطوری که $n \geq N$ نامساوی $s_n \geq M$ را ایجاب کند. در این صورت، می‌نویسیم

$$s_n \to +\infty.$$

بهمین نحو، اگر به‌ازای هر M حقیقی عددی صحیح مثل N باشد بطوری که $n \geq N$ نامساوی $s_n \leq M$ را نتیجه دهد، خواهیم نوشت

$$s_n \to -\infty.$$

باید خاطر نشان کنیم که ما اینک علامت $\to$ را (که در تعریف ۱۰۳ عرضه شد) برای بعضی از انواع دنباله‌های واگرا، همچون دنباله های همگرا به کار می بریم. لکن تعریفهای همگرایی و حد آمده در تعریف ۱۰۳ بهیچوجه تغییر نکرده‌اند.

۱۶۰۳ تعریف. فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. E را مجموعهٔ اعدادی‌چون x (در دستگاه‌وسعت یافتهٔ اعداد حقیقی) می‌انگاریم که به‌ازای زیردنباله‌ای مانند $\{s_{n_k}\}$ ، $s_{n_k} \to x$. این E شامل تمام حدود زیردنباله‌ای که در تعریف ۵۰۳ معرفی شد، به انضمام احتمالا" اعداد $+\infty$ و $-\infty$ ، می‌باشد.
حال تعریفهای ۸۰۱ و ۲۳۰۱ را به یاد آورده قرار می‌دهیم

$$s^* = \sup E,$$
$$s_* = \inf E.$$

اعداد s^* و s_* را حدود **بالایی و پایینی** $\{s_n\}$ می‌نامیم، و برای آنها نمادهای

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = s^*, \qquad \liminf_{n\to\infty} s_n = s_*$$

را به کار خواهیم برد.

۱۷۰۳ قضیه. *فرض‌کنیم $\{s_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. گیریم E و s^* همان معانی داشته در تعریف ۱۶۰۳ را داشته باشند. در این صورت، s^* از دو خاصیت‌زیر*

بهره‌مند است :

(آ) $s^* \in E$ ؛

(ب) چنانچه $x > s^*$ ، عددی صحیح مانند N هست بطوری که $n \geq N$ نامساوی $s_n < x$ را ایجاب می‌کند .

بعلاوه ، s^* تنها عددی است که از خواص (آ) و (ب) برخوردار است .

البته ، نتیجه‌ای مشابه برای s_* برقرار می‌باشد .

برهـــان

(آ) هرگاه $s^* = +\infty$ ، آنگاه E از بالا کراندار نیست . درنتیجه ، $\{s_n\}$ از بالا کراندار نیست ، و زیردنباله‌ای مانند $\{s_{n_k}\}$ وجود دارد بطوری که $s_{n_k} \to +\infty$.

هرگاه s_* حقیقی باشد ، آنگاه E از بالا کراندار است ، و دست کم یک حد زیر- دنباله‌ای وجود دارد . پس (آ) از قضایای ۷۰۳ و ۲۸۰۲ نتیجه خواهد شد .

هرگاه $s^* = -\infty$ ، آنگاه E فقط شامل یک عنصر ، یعنی $-\infty$ ، است ، و حد زیر- دنباله‌ای وجـود نخواهد داشت . بنابراین ، به‌ازای هـر M حقیقی ، نامساوی $s_n > M$ به ازای حداکثر تعدادی متناهی n برقرار می‌شود پس $s_n \to -\infty$.

این (آ) را در جمیع حالات ثابت می‌کند .

(ب) فرض‌کنیم عددی‌چون $x > s^*$ باشد بطوری‌که به‌ازای بی‌نهایت مقدار از n ، $s_n \geq x$. در ایـــن حالت عددی مانند $y \in E$ هست بقسمی که $y \geq x > s^*$ ، که با تعریف s^* در تضاد است .

بنابراین ، s^* در (آ) و (ب) صدق خواهد کرد .

برای اثبات منحصر بفرد بـــودن ، فرض می‌کنیم دو عدد مانند p و q باشند که در (آ) و (ب) صدق کنند و $p < q$ ، x را طوری می‌گیریم که $p < x < q$. چون p در (ب) صدق می‌کند ، پس به‌ازای هر $n \geq N$ داریم $s_n < x$. اما ، در این صورت ، q نمی‌تواند در (آ) صدق نماید .

۱۸۰۳ چند مثال

(آ) فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله‌ای شامل تمام اعداد گویا باشد . پس هر عدد حقیقی‌یک حد زیر دنباله‌ای است ، و

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = +\infty, \qquad \liminf_{n\to\infty} s_n = -\infty.$$

(ب) فرض کنیم $s_n = (-1^n/[1 + (1/n)]$. در این صورت ،

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = 1, \qquad \liminf_{n\to\infty} s_n = -1.$$

(پ) برای دنبالهٔ حقیقی $\{s_n\}$ ، $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ اگر و فقط اگر

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n = s.$$

این بخش را با قضیه‌ای که سودمند است و اثباتش کاملاً" بدیهی است ختم می‌کنیم.

۱۹۰۳ قضیه. *هرگاه به‌ازای $n \geq N$ ، که N ثابت است ، داشته باشیم $s_n \leq t_n$ ، آنگاه*

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \leq \liminf_{n\to\infty} t_n,$$
$$\limsup_{n\to\infty} s_n \leq \limsup_{n\to\infty} t_n.$$

چند دنبالهٔ خاص

حال به محاسبهٔ حدود چند دنباله که کرارا" به آنها برمی‌خوریم می‌پردازیم . برهانها همه بر این نکته استوار خواهند بود : هرگاه به‌ازای $n \geq N$ ، که در آن N عدد ثابتی است ، داشته باشیم $0 \leq x_n \leq s_n$ ، و $s_n \to 0$ ، آنگاه $x_n \to 0$.

۲۰۰۳ قضیه

(آ) *هرگاه $p > 0$ ، آنگاه* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

(ب) *هرگاه $p > 0$ ، آنگاه* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

(پ) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(ت) *هرگاه $p > 0$ و α حقیقی باشد ، آنگاه* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$.

(ث) *هرگاه $|x| < 1$ ، آنگاه* $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

برهان

(آ) n را بزرگتر از $(1/\varepsilon)^{1/p}$ می‌گیریم . (توجه‌کنید که در اینجا از خاصیت‌ارشمیدسی دستگاه اعداد حقیقی استفاده شده است .)

(ب) هرگاه $p > 1$، قرار می‌دهیم $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$.در این صورت ، $x_n > 0$ و ، بنابر قضیهٔ دوجمله‌ای ،

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = p.$$

پس

$$0 < x_n \leq \frac{p-1}{n}.$$

بنابراین ، $x_n \to 0$. هرگاه $p = 1$، (ب) بدیهی است و ، چنانچه $0 < p < 1$،با معکوس گرفتن نتیجه به دست خواهد آمد .

(پ) قرار می‌دهیم $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. پس $x_n \geq 0$ و ، بنابر قضیهٔ دوجمله‌ای ،

$$n = (1 + x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$

درنتیجه ،

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \qquad (n \geq 2).$$

(ت) فرض کنیم k عدد صحیحی باشد بقسمی که $\alpha < k$ و $k > 0$. به‌ازای $n > 2k$ ،

$$(1 + p)^n > \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!}.$$

ازاینرو ،

$$0 < \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha-k} \qquad (n > 2k).$$

چون $\alpha - k < 0$،بنابر (آ) ، $n^{\alpha-k} \to 0$.

(ث) α را در (ت) صفر اختیار کنید .

سریها

تا پایان این فصل همهٔ دنباله‌ها و سریهای مورد نظر مختلط‌اند مگرآنکه خلافش تصریح شود . تعمیم بعضی از قضایای زیر به سریهای با جملات در R^k در تمرین ۱۵ ذکر شده است .

۲۱۰۳ تعریف. به فرض معلوم بودن دنباله‌ٔ $\{a_n\}$ ، از نماد

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \qquad (p \le q)$$

برای نمایش مجموع $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$ استفاده می‌کنیم. به $\{a_n\}$ دنباله‌ٔ $\{s_n\}$ را ، که در آن

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k ,$$

مربوط می‌سازیم. برای $\{s_n\}$ عبارت علامتی

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

یا ، خلاصه‌تر از آن ،

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4}$$

را نیز به‌کار خواهیم برد.

علامت (۴) را یک *سری نامتناهی* ، یا فقط یک *سری* ، می‌نامیم. s_n ها *مجموعهای جزئی* سری خوانده می‌شوند. هرگاه $\{s_n\}$ همگرا به s باشد ، می‌گوییم سری *همگرا* است و می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

عدد s را *مجموع* سری نام داده‌اند ، ولی باید بوضوح قید شود که s *حد دنباله‌ای از مجموعهاست* و تنها با عمل جمع به دست نمی‌آید.

هرگاه $\{s_n\}$ واگرا باشد ، سری *واگرا* گفته خواهد شد.

گاهی ، بجهت ساده بودن نماد ، سریها را به شکل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{5}$$

در نظر می‌گیریم ؛ و اغلب ، وقتی امکان ابهام در بین نیست و یا اینکه تمایز اهمیتی ندارد ، به جای (۴) یا (۵) فقط می‌نویسیم Σa_n .

واضح است که هر قضیه در باب دنباله‌ها را می‌توان بر حسب سریها (باقرار $a_1 = s_1$ و ، به‌ازای $n > 1$ ، $a_n = s_n - s_{n-1}$) بیان کرد ، و بالعکس. اما ، با اینحال ، توجه به هردو مفهوم سودمند است.

محک کشی (قضیهٔ ۱۱۰۳) را می‌توان به شکل زیر مجدداً" بیان کرد :

۲۲۰۳ قضیه. *Σa_n همگراست اگر و فقط اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N باشد بطوری که اگر $m \ge n \ge N$ ،*

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \varepsilon. \tag{6}$$

بخصوص، با فرض $m = n$ ، (۶) به صورت

$$|a_n| \le \varepsilon \qquad (n \ge N)$$

در می‌آید . به عبارت دیگر :

۲۳۰۳ قضیه. *هرگاه Σa_n همگرا باشد ، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

با اینحال ، شرط $a_n \to 0$ برای تضمین همگرایی Σa_n کافی نیست . مثلا" ، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

واگراست . برای اثبات ، خواننده را به قضیهٔ ۲۸۰۳ ارجاع می‌دهیم .

قضیهٔ ۱۴۰۳ ، مربوط به دنباله‌های یکنوا ، همتای سرراستی برای سریها نیز دارد .

۲۴۰۳ قضیه. *یک سری با جملات نامنفی* همگراست اگر و فقط اگر که مجموعهای جزئی آن یک دنبالهٔ کراندار بسازند .*

حال به " آزمون مقایسه‌ای " ، که یک آزمون همگرایی با سرشتی متفاوت است ، می‌پردازیم .

۲۵۰۳ قضیه

(آ) هرگاه به‌ازای هر $n \ge N_0$ ، که N_0 عدد صحیح ثابتی است ، داشته باشیم $|a_n| \le c_n$ ، و Σc_n همگرا باشد ، آنگاه Σa_n همگرا می‌باشد .

(ب) هرگاه به ازای هر $n \ge N_0$ ، $a_n \ge d_n \ge 0$ ، و Σd_n واگرا باشد ، آنگاه Σa_n واگرا خواهد بود .

---

* اصطلاح "نامنفی" همیشه اشاره به اعداد حقیقی دارد .

توجه کنید که (ب) فقط در مورد سریهای با جملات نامنفی صحیح است .

برهان . هرگاه $\varepsilon > 0$ داده شده باشد ، بنا به محک‌کشی $N \geq N_0$ ، ی هست بطوری که $m \geq n \geq N$ نامساوی

$$\sum_{k=n}^{m} c_k \leq \varepsilon$$

را ایجاب می‌کند . پس

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k \leq \varepsilon,$$

و (آ) نتیجه خواهد شد .

و اما بعد ، (ب) از (آ) حاصل می‌شود ، زیرا که اگر Σa_n همگرا باشد ، Σd_n نیز باید چنین باشد [توجه کنید که (ب) از قضیهٔ ۲۴۰۳ نیز به دست می‌آید] .

آزمون مقایسه‌ای آزمون بسیار مفیدی است . برای آنکه به طرز موثری به کار رود ، باید با چند سری با جملات نامنفی که همگرایی یا واگرایی آنها معلوم شده آشنا بشویم .

سریها باجملات نامنفی

شاید که ساده‌ترین همه سری هندسی باشد .

۲۶۰۳ قضیه . هرگاه $0 \leq x < 1$ ، آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \cdot$$

چنانچه $x \geq 1$ ، سری واگرا می‌باشد .

برهان . هرگاه $x \neq 1$ ،

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \cdot$$

نتیجه در صورتی که $n \to \infty$ به دست خواهد آمد . به ازای $x = 1$ داریم

$$1 + 1 + 1 + \cdots,$$

که بوضوح واگرا می‌باشد .

در بسیاری از حالات که در عمل پیش می‌آیند ، جملات سری تدریجاً " نزول می‌کنند . از اینروست که به قضیهٔ زیر از کشی توجه خاصی مبذول می‌شود . کیفیت ممتاز قضیه این است که زیر دنبالهٔ نسبتاً " نزاری " از $\{a_n\}$ سرنوشت همگرایی یا واگرایی Σa_n را تعیین می‌کند .

۲۷.۳ قضیه . فرض کنیم $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$ **. در این صورت ، سری** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***همگراست اگر و فقط اگر سری***

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots \tag{7}$$

همگرا باشد .

برهان . بنابر قضیهٔ ۲۴.۳ ، کافی است کرانداری مجموعهای جزئی را در نظر بگیریم . فرض کنیم

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$t_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} .$$

به‌ازای $n < 2^k$ داریم

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= t_k, \end{aligned}$$

پس

$$s_n \leq t_k . \tag{8}$$

از سوی دیگر ، اگر $n > 2^k$ ،

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq \tfrac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \\ &= \tfrac{1}{2}t_k . \end{aligned}$$

در نتیجه ،

$$2s_n \geq t_k . \tag{9}$$

بنابر (۸) و (۹)، دنبالەهای $\{s_n\}$ و $\{t_k\}$ یا هر دو کراندارند یا هر دو بی‌کران. این برهان را تمام خواهد کرد.

۲۸۰۳ قضیه. $\sum \frac{1}{n^p}$ **همگراست اگر** $p > 1$ **، و واگراست اگر** $p \le 1$.

برهان. هرگاه $p \le 0$ ، واگرایی از قضیهٔ ۲۳۰۳ نتیجه می‌شود. چنانچه $p > 0$ ، قضیهٔ ۲۷۰۳ قابل استفاده است، و سری

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k}$$

را به ما می‌دهد. حال گوییم $2^{1-p} < 1$ اگر و فقط اگر $1 - p < 0$، و نتیجه از مقایسه با سری هندسی (با اختیار $x = 2^{1-p}$ در قضیهٔ ۲۶۰۳) به دست خواهد آمد.

به عنوان کاربرد دیگری از قضیهٔ ۲۷۰۳ ثابت می‌کنیم:

۲۹۰۳ قضیه. هرگاه $p > 1$ ،

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p} \tag{10}$$

همگراست. چنانچه $p \le 1$ **، سری واگرا خواهد بود.**

تبصره. " $\log n$ " مبین لگاریتم n در پایهٔ e است (قس. تمرین ۷، فصل ۱). عدد e لحظه‌ای دیگر تعریف خواهد شد (ر.ک. تعریف ۳۰۰۳). چون $\log 1 = 0$ ، سری فوق را از $n = 2$ شروع می‌کنیم.

برهان. یکنوایی تابع لگاریتمی (که در فصل ۸ با تفصیل بیشتری مطرح می‌شود) صعودی بودن $\{\log n\}$ را ایجاب می‌کند. ازاینرو، $\{1/n \log n\}$ نزول می‌کند، و می‌توان قضیهٔ ۲۷۰۳ را در مورد (۱۰) به کاربرد. این عمل ما را به سری

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k(\log 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k \log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \tag{11}$$

می‌رساند، و قضیهٔ ۲۹۰۳ از قضیهٔ ۲۸۰۳ نتیجه خواهد شد.

واضح است که این کار را می‌شود ادامه داد. به عنوان مثال،

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n} \tag{12}$$

واگراست، حال آنکه

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^2} \tag{13}$$

همگرا می‌باشد.

حال دیده می‌شود که جملات سری (۱۲) با جمله‌های (۱۳) تفاوت بسیار کمی دارند. بااینحال، یکی واگراست و دیگری همگرا. هرگاه به عملی که ما را از قضیهٔ ۲۸۰۳ به قضیهٔ ۲۹۰۳ و بعد به سریهای (۱۲) و (۱۳) رسانید ادامه دهیم، یک جفت سری همگرا و واگرا به دست می‌آوریم که تفاوت جملاتشان حتی از تفاوت جمله‌های (۱۲) و (۱۳) نیز کمتر است. لذا، ممکن است شخص این حدس را بزند که نوعی حالت حدی وجود دارد؛ لااقل تا جایی که به سریهای با ضرایب یکنوا مربوط می‌شود، "مرز"ی هست که در یک سویش تمام سریهای همگرا و در سوی دیگرش تمام سریهای واگرا قرار دارند. البته، مفهوم "مرز" در اینجا کاملا" مبهم است. نکته‌ای را که مایلیم خاطرنشان کنیم این است که "هر طورهم که به‌این مفهوم دقت ببخشیم، حدس فوق درست نخواهد بود. تمرینهای ۱۱ (ب) و ۱۲ (ب) می‌توانند به عنوان شاهد گرفته شوند.

ما قصد آنکه بیشتر وارد این جنبه از نظریهٔ همگرایی بشویم نداریم، و خواننده‌را به فصل نه، بویژه بخش ۴۱، کتاب "نظریه و کاربرد سریهای نامتناهی" کنوپ[1] ارجاع می‌دهیم.

عدد e

۳۰۰۳ تعریف. $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

در اینجا اگر $n \geq 1$، $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$، و $0! = 1$.

چون

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n}$$

1. Knopp's "Theory and Application of Infinite Series,"

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

پس سری همگراست، و تعریف فوق معنی دارد. درواقع، این سری خیلی سریع همگراست، و امکان محاسبهٔ e را با دقت زیاد به ما می‌دهد.

جالب است توجه کنیم که e را می‌توان با عمل حدی دیگری نیز تعریف کرد. اثبات آن مثال خوبی از اعمال با حدود را به دست می‌دهد.

۳۱۰۳ قضیه. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

برهان. فرض کنیم

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

بنابر قضیهٔ دوجمله‌ای،

$$t_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

ازاینرو، $t_n \le s_n$. پس، بر طبق قضیهٔ ۱۹۰۳،

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \le e. \tag{14}$$

دیگر آنکه، اگر $n \ge m$،

$$t_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

m را ثابت می‌گیریم و n را به بی‌نهایت میل می‌دهیم. به دست خواهیم آورد

$$\liminf_{n\to\infty} t_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}.$$

در نتیجه،

$$s_m \le \liminf_{n\to\infty} t_n.$$

بالاخره، با فرض $m \to \infty$ خواهیم داشت

$$e \le \liminf_{n\to\infty} t_n. \tag{15}$$

حال قضیه از (۱۴) و (۱۵) حاصل خواهد شد .

سرعت همگرایی سری $\sum \frac{1}{n!}$ را می‌شود این طور تخمین زد : هرگاه s_n همان معنی بالا را بدهد ، خواهیم داشت

$$e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right\} = \frac{1}{n!n} \cdot$$

پس

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n} \cdot \tag{16}$$

لذا ، مثلاً ، s_{10} ، e را با خطایی کمتر از 10^{-7} تخمین می‌زند . نامساوی (۱۶) ازجنبهٔ نظری نیز مورد توجه است ، زیرا که با آن می‌توانیم گنگ بودن e را خیلی آسان اثبات کنیم .

۳۲.۳ قضیه . *e گنگ است .*

برهان . فرض کنیم e گویا باشد . پس $e = p/q$ که در آن p و q اعداد صحیح مثبتی می‌باشند . بنابر (۱۶) ،

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q} \cdot \tag{17}$$

$q!e$ ، مطابق فرض ما ، عددی صحیح است . چون

$$q!s_q = q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

صحیح است ، می‌بینیم که $q!(e - s_q)$ نیز صحیح می‌باشد .

و چون $q \geq 1$ ، نامساویهای (۱۷) وجود عدد صحیحی را بین 0 و 1 ایجاب می‌کنند . بنابراین ، به تناقض رسیده‌ایم .

درواقع ، e حتی یک عدد جبری هم نیست . برای اثبات ساده‌ای از این ، ر.ک. صفحهٔ ۲۵ کتاب نیون[1] ، یا صفحهٔ ۱۷۶ کتاب هراشتاین[2] ، که در کتابنامه آمده‌اند .

آزمونهای ریشه و نسبت

۳۳.۳ قضیه (آزمون ریشه) . *چنانچه Σa_n مفروض باشد ، قرار می‌دهیم $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.*

1. Niven 2. Herstein

در این صورت،

(آ) هرگاه $\alpha < 1$، Σa_n همگراست؛

(ب) هرگاه $\alpha > 1$، Σa_n واگراست؛

(پ) چنانچه $\alpha = 1$، این آزمون اطلاعی به دست نخواهد داد.

برهان. هرگاه $\alpha < 1$، می‌توان β را طوری اختیار کرد که $\alpha < \beta < 1$، و [طبق قضیهٔ ۱۷۰۳ (ب)] عدد صحیح N را قسمی اختیار نمود که به‌ازای $n \geq N$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta;$$

یعنی، $n \geq N$ ایجاب کند که

$$|a_n| < \beta^n.$$

چون $0 < \beta < 1$، $\Sigma \beta^n$ همگراست. حال همگرایی Σa_n از آزمون مقایسه‌ای نتیجه می‌شود.

هرگاه $\alpha > 1$، آنگاه، باز بنابر قضیهٔ ۱۷۰۳، دنباله‌ای مانند $\{n_k\}$ هست بطوری که

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \alpha.$$

بنابراین، به‌ازای بی‌نهایت مقدار از n، $|a_n| > 1$. درنتیجه، شرط $a_n \to 0$، که برای همگرایی Σa_n لازم است، برقرار نمی‌باشد (قضیهٔ ۲۳۰۳).

برای اثبات (پ)، سریهای

$$\sum \frac{1}{n}, \ \sum \frac{1}{n^2}$$

را در نظر می‌گیریم. برای هر یک از این سریها، $\alpha = 1$، اما اولی واگراست و دومی همگرا.

۳۴۰۳ قضیه (آزمون نسبت). سری Σa_n

(آ) همگراست هرگاه

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1;$$

(ب) واگراست هرگاه به‌ازای هر $n \geq n_0$، که در آن n_0 عدد صحیح ثابتی است،

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1.$$

برهان. هرگاه شرط (آ) برقرار باشد، می‌توان $\beta < 1$ ای و عدد صحیح N را طوری یافت

که به‌ازای $n \geq N$،

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta .$$

بخصوص،

$$\begin{aligned} &|a_{N+1}| < \beta |a_N|, \\ &|a_{N+2}| < \beta |a_{N+1}| < \beta^2 |a_N|, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &|a_{N+p}| < \beta^p |a_N|. \end{aligned}$$

یعنی، به‌ازای هر $n \geq N$،

$$|a_n| < |a_N| \beta^{-N} \cdot \beta^n .$$

چون $\Sigma \beta^n$ همگراست، (آ) از آزمون مقایسه‌ای نتیجه می‌شود.

چنانچه به‌ازای هر $n \geq n_0$، $|a_{n+1}| \geq |a_n|$. به‌آسانی دیده می‌شود که شرط $a_n \to 0$ برقرار نیست، و (ب) حاصل می‌باشد.

توجه: دانستن اینکه $\lim a_{n+1}/a_n = 1$ چیزی در باب همگرایی Σa_n به ما نمی‌دهد. سریهای $\Sigma 1/n$ و $\Sigma 1/n^2$ موءید این سطلب خواهند بود.

۳۵۰۳ چند مثال

(آ) سری

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

را در نظر می‌گیریم، که در مورد آن داریم

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

آزمون ریشه همگرایی را نشان می‌دهد. آزمون نسبت قابل به کار بردن نیست.

(ب) همین مطلب در مورد سری،

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots$$

صادق است، که در آن

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{8},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2,$$

ولی

$$\lim \sqrt[n]{a_n}=\tfrac{1}{2}\cdot$$

۳۶۰۳ چند تبصره. آزمون نسبت اغلب از آزمون ریشه آسانتر به کار می‌رود، زیرا معمولاً نسبتها ساده‌تر از ریشه‌های n م حساب می‌شوند. با اینحال، آزمون ریشه دامنهٔ عمل وسیعتری دارد. به عبارت دقیقتر، هروقت آزمون نسبت همگرایی را نشان دهد، آزمون ریشه نیز همان می‌کند؛ زمانی که آزمون ریشه بی‌حاصل است، آزمون نسبت نیزچنین خواهد بود. این مطلب نتیجه‌ای است از قضیهٔ ۳۷۰۳، و با مثالهای فوق توضیح می‌شود.

هیچیک از دو آزمون در مورد واگرایی دقیق نیست. هر دو واگرایی را از این مطلب که "وقتی $n\to\infty$، a_n به صفر نمی‌گراید" نتیجه می‌گیرند.

۳۷۰۳ قضیه. *به‌ازای هر دنبالهٔ $\{c_n\}$ از اعداد مثبت،*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}\le \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}\le \limsup_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

برهان. نامساوی دوم را ثابت می‌کنیم. اثبات اولی کاملاً به همین نحو است. قرار می‌دهیم

$$\alpha=\limsup_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

هرگاه $\alpha=+\infty$، چیزی برای اثبات وجود ندارد. چنانچه α متناهی باشد، β را بزرگتر از α اختیار می‌کنیم. در این صورت، عدد صحیحی مانند N هست بقسمی که به‌ازای هر

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \beta \cdot \quad ، n \geq N$$

بخصوص، به‌ازای هر $p > 0$

$$c_{N+k+1} \leq \beta c_{N+k} \qquad (k = 0, 1 \ \ldots, p-1).$$

با ضرب این نامساویها در هم خواهیم داشت

$$c_{N+p} \leq \beta^p c_N,$$

یا

$$c_n \leq c_N \beta^{-N} \cdot \beta^n \qquad (n \geq N).$$

بنابراین،

$$\sqrt[n]{c_n} \leq \sqrt[n]{c_N \beta^{-N}} \cdot \beta.$$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۲۰۰۳ (ب)،

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \beta. \tag{18}$$

چون (۱۸) به‌ازای هر $\beta > \alpha$ درست است، خواهیم داشت

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \alpha.$$

سریهای توانی

۳۸۰۳ تعریف. سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{19}$$

که در آن دنبالهٔ $\{c_n\}$ از اعداد مختلط داده شده، یک **سری توانی** نامیده می‌شود. اعداد c_n **ضرایب** سری نام دارند. در اینجا z یک عدد مختلط است.

سری، در حالت کلی، بسته به‌انتخاب z، همگرا یا واگرا می‌باشد. به عبارت‌دقیقتر، به‌هر سری توانی دایره‌ای مربوط است، به‌نام دایرهٔ همگرایی، بطوری که (۱۹) همگراست هرگاه z درون‌دایره باشد، و واگراست هرگاه z برون‌آن باشد (برای محسوب بودن‌جمیع حالات، اجبارا" صفحه را درون یک دایره به شعاع نامتناهی، و نقطه را دایره‌ای به شعاع صفر می‌گیریم). وضع روی دایرهٔ همگرایی خیلی بیشتر در تغییر است، و به این‌سادگیها قابل توصیف نخواهد بود.

۳۹۰۳ قضیه. چنانچه سری توانی $\Sigma c_n z^n$ داده شده باشد، قرار می‌دهیم

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \qquad R = \frac{1}{\alpha}.$$

(اگر $\alpha = 0$، $R = +\infty$؛ چنانچه $\alpha = +\infty$، $R = 0$.) در این صورت، $\Sigma c_n z^n$ همگرا ست هرگاه $|z| < R$، و واگراست هرگاه $|z| > R$.

برهان. قرار می‌دهیم $a_n = c_n z^n$، و آزمون ریشه را به کار می‌گیریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|z|}{R}.$$

توجه. R شعاع همگرایی $\Sigma c_n z^n$ خوانده می‌شود.

۴۰.۳ چند مثال

(آ) سری $\Sigma n^n z^n$ دارای R مساوی 0 است.

(ب) سری $\sum \frac{z^n}{n!}$ دارای R مساوی $+\infty$ است. (در این حالت، آزمون نسبت از آزمون ریشه آسانتر به کار می‌رود.)

(پ) سری Σz^n دارای R مساوی یک است. هرگاه $|z| = 1$، سری به این دلیل که وقتی $n \to \infty$، $\{z^n\}$ به 0 میل نمی‌کند، واگرا می‌باشد.

(ت) سری $\sum \frac{z^n}{n}$ دارای R مساوی یک است. این سری در صورتی که $z = 1$ واگراست. به‌ازای کلیهٔ z های دیگری که $|z| = 1$ همگرا می‌باشد. (حکم آخر در قضیهٔ ۴۴.۳ ثابت خواهد شد.)

(ث) سری $\sum \frac{z^n}{n^2}$ دارای $R = 1$ است. این سری، بر طبق آزمون مقایسه‌ای، به این دلیل که $|z^n/n^2| = 1/n^2$، به‌ازای تمام z هایی که $|z| = 1$ همگرا می‌باشد.

جمعبندی به طریقهٔ جزء به جزء

۴۱.۳ قضیه. چنانچه دو دنبالهٔ $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مفروض باشند، به ازای $n \geq 0$ قرار می‌دهیم

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k ,$$

و نیز فرض می‌کنیم $A_{-1} = 0$. در این صورت، اگر $0 \leq p \leq q$، خواهیم داشت

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p. \tag{20}$$

برهان

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1},$$

و آخرین عبارت سمت راست بوضوح مساوی طرف راست (۲۰) خواهد بود.

فرمول (۲۰)، که "فرمول جمعبندی جزئی" نام دارد، در بررسی سریهایی به شکل $\Sigma a_n b_n$ ، بویژه وقتی $\{b_n\}$ یکنواست، سودمند است. حال به کاربردهای آن می‌پردازیم.

۴۲.۳ قضیه. فرض کنیم

(آ) *مجموعهای جزئی A_n از Σa_n یک دنبالهٔ کراندار بسازند؛*

(ب) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots$؛

(پ) $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$.

در این صورت، $\Sigma a_n b_n$ همگرا می‌باشد.

برهان. M را طوری اختیار می‌کنیم که در ازای هر n، $|A_n| \leq M$. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، عدد صحیحی چون N هست بقسمی که $b_N \leq (\varepsilon/2M)$. به ازای $N \leq p \leq q$ خواهیم داشت

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| = \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\right|$$

$$\leq M \left|\sum_{n=p}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p\right|$$

$$= 2Mb_p \leq 2Mb_N \leq \varepsilon.$$

همگرایی اینک از محک کشی نتیجه می‌شود. توجه داریم که اولین نامساوی در رشته نامساویهای فوق بی شک به این مطلب که $b_n - b_{n+1} \geq 0$ وابسته است.

۴۳.۳ قضیه. فرض کنیم

(آ) $|c_1| \geq |c_2| \geq |c_3| \geq \cdots$؛

(ب) $c_{2m-1} \geq 0$ و $c_{2m} \leq 0$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$؛

(پ) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

در این صورت، Σc_n همگرا می‌باشد.

سریی که برای آن شرط (ب) برقرار باشد "سری متناوب" نام دارد. لایب‌نیتز[1] بر قضیهٔ فوق واقف بوده است.

برهان. قضیهٔ ۴۲.۳ را با فرض $a_n = (-1)^{n+1}$ و $b_n = |c_n|$ به کار برید.

۴۴.۳ قضیه. *فرض کنیم شعاع همگرایی $\Sigma c_n z^n$ مساوی 1 بوده، $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \cdots$، و $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. در این صورت، $\Sigma c_n z^n$ در هر نقطه از دایرهٔ $|z| = 1$، جز احتمالاً در $z = 1$، همگرا می‌باشد.*

برهان. قرار می‌دهیم $a_n = z^n$ و $b_n = c_n$. در این صورت، مفروضات قضیهٔ ۴۲.۳ برقرارند، زیرا که هرگاه $|z| = 1$ و $z \neq 1$،

$$|A_n| = \left|\sum_{m=0}^{n} z^m\right| = \left|\frac{1 - z^{m+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{2}{|1 - z|}.$$

همگرایی مطلق

سری Σa_n را به طور مطلق همگرا نامند هرگاه سری $\Sigma |a_n|$ همگرا باشد.

۴۵.۳ قضیه. *هرگاه Σa_n به طور مطلق همگرا باشد، این سری همگرا نیز هست.*

برهان. حکم از نامساوی

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{n=k}^{m} |a_k|$$

---

1. Leibnitz

و محک کشی نتیجه می‌شود .

۴۶.۳ چند تبصره. در مورد سریهای با جملات مثبت ، همگرایی مطلق همان همگرایی می‌باشد .

هرگاه Σa_n همگرا بوده ولی $\Sigma|a_n|$ واگرا باشد ، می‌گوییم Σa_n ***به طورنامطلق همگرا*** است . مثلا" ، سری

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

به طور نامطلق همگرا می‌باشد (قضیهٔ ۴۳.۳) .

آزمون مقایسه‌ای ، همچون آزمونهای ریشه و نسبت ، درواقع آزمونی برای همگرایی مطلق است و ، لذا ، نمی‌تواند در باب سریهای همگرای نامطلق اطلاعی به دست دهد . گاهی برای پرداختن به سریهای اخیر می‌توان از جمعبندی به طریقهٔ جزء به جزء استفاده‌کرد . بخصوص ، سریهای توانی درون دایرهٔ همگرایی به طور نامطلق همگرا می‌باشند .

خواهیم دید که با سریهای همگرای مطلق می‌توان تا حدود زیادی مثل مجموعهای متناهی عمل کرد . می‌توانیم ، بی‌آنکه بر مجموع سریها اثری بگذاریم ، آنهارا جمله به جمله درهم ضرب کنیم‌وترتیبی را که بـا آن جمعها صورت می‌گیرند تغییر دهیم . لکـن این اعمال برای‌سریهای‌به طور نامطلق همگرا دیگر جایز نیست ، و باید ضمن کار با آنها احتیاط بیشتری به خرج داد .

جمع وضرب سریها

۴۷.۳ قضیه. هرگاه $\Sigma a_n = A$ و $\Sigma b_n = B$ ، آنگاه $\Sigma(a_n + b_n) = A + B$ و ، *به ازای هر* c *ی ثابت* ، $\Sigma ca_n = cA$.

برهان. فرض کنیم

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k .$$

پس

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) .$$

چون $\lim A_n = A$ و $\lim B_n = B$ ، می‌بینیم که

$$\lim_{n\to\infty}(A_n+B_n)=A+B.$$

اثبات حکم دوم از این هم ساده‌تر است .

لذا ، دو سری همگرا را می‌توان جمله به جمله بهم افزود ، و سری حاصل به مجموع دو سری همگرا می‌باشد . در مورد ضرب دو سری ، وضع از این پیچیده‌تراست . ابتدا باید حاصل‌ضرب‌را تعریف کنیم . این را می‌توان به طرق مختلف انجام داد . ما "حاصل ضرب کشی" را در نظر خواهیم گرفت .

۴۸۰۳ تعریف . هرگاه Σa_n و Σb_n داده شده باشد ، قرار می‌دهیم

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\qquad(n=0,1,2,\ldots),$$

و Σc_n را *حاصل ضرب* دو سری مفروض می‌خوانیم .

این تعریف‌را می‌شود به این صورت به دست آورد : هرگاه دو سری توانی $\Sigma a_n z^n$ و $\Sigma b_n z^n$ را گرفته ، آنها را جمله به جمله در هم ضرب کرده ، و جملات همتوان z را دسته بندی کنیم ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n&=(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots)(b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots)\\&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)z^2+\cdots\\&=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots.\end{aligned}$$

با قرار $z=1$ به تعریف بالا خواهیم رسید .

۴۹۰۳ مثال . هرگاه

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,\qquad B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k,\qquad C_n=\sum_{k=0}^{n}c_k,$$

و $A_n\to A$ و $B_n\to B$ ، آنگاه ، چون رابطهٔ $C_n=A_nB_n$ را نداریم ، بهیچوجه روشن نیست که $\{C_n\}$ به AB همگرا هست یا خیر . بستگی $\{C_n\}$ به $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ بستگی کاملاً پیچیده‌ای‌است (ر . ک . برهان قضیهٔ ۵۰۰۳) . حال نشان می‌دهیم که حاصل‌ضرب دو سری همگرا ممکن است عملاً واگرا شود .

سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

همگراست (قضیهٔ ۴۳۰۳). حاصل ضرب این سری را با خودش تشکیل می‌دهیم، و به دست می‌آوریم که

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots.$$

پس

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

چون

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \le \left(\frac{n}{2}+1\right)^2,$$

داریم

$$|c_n| \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

درنتیجه، شرط $c_n \to 0$ ، که لازمهٔ همگرایی Σc_n است، برقرار نخواهد بود.

در پرتو قضیهٔ بعدی، که به مرتنس[1] منسوب است، ملاحظه می‌کنیم که ما دراینجا حاصل ضرب دو سری به طور نامطلق همگرا را در نظر گرفته‌ایم.

۵۰۳ قضیه. فرض کنیم

(آ) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *به طور مطلق همگرا باشد؛*

(ب) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$؛

(پ) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$؛

---

1. Mertens

(ت) $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

در این صورت ،

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB .$$

یعنی ، حاصل ضرب دو سری همگرا یک سری همگراست ، و ، درواقع ، اگر دست کم یکی از دو سری به طور مطلق همگرا باشد کافی است .

برهان . قرار می‌دهیم

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k , \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k , \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k , \qquad \beta_n = B_n - B.$$

در این صورت ،

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 \\ &= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\ &= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0 . \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم

$$\gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0 .$$

می‌خواهیم نشان دهیم که $C_n \to AB$. گوییم چون $A_n B \to AB$ ، کافی است نشان داده شود که

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n = 0. \tag{21}$$

قرار می‌دهیم

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| .$$

[اینجاست که از (آ) استفاده می‌کنیم .] فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد . بنابر (پ) ، $\beta_n \to 0$. پس می‌توان N را طوری اختیار کرد که به ازای هر $n \geq N$ ، $|\beta_n| \leq \varepsilon$ ،

که در این حالت

$$\begin{aligned}|\gamma_n| &\le |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1}a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0| \\ &\le |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\alpha.\end{aligned}$$

چون‌وقتی $k \to \infty$ ، $a_k \to 0$ ، با ثابت گرفتن N و فرض $n \to \infty$ به دست می‌آوریم که

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \le \varepsilon\alpha.$$

از آنجا که ε دلخواه است، (۲۱) نتیجه خواهد شد .

سؤال دیگری که ممکن است پرسیده شود این است که اگر سری Σc_n همگرا باشد، آیا باید مجموعی مساوی AB داشته باشد؟ آبل[1] نشان داد که جواب مثبت است .

۵۱۰۳ قضیه. هرگاه سریهای Σa_n ، Σb_n ، و Σc_n **به** A ، B ، و C **همگرا باشند و** $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$ ، **آنگاه** $C = AB$.

در اینجا در ارتباط با همگرایی مطلق هیچ فرضی نشده است . بعد از قضیهٔ ۲۰۸ برهان ساده‌ای را (که به پیوستگی سریهای توانی وابسته است) ارائه خواهیم داد .

تجدید آرایشها

۵۲۰۳ تعریف. فرض کنیم $\{k_n\}$ ، $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، دنباله‌ای باشد که در آن هر عدد صحیح مثبت یک بار و فقط یک بار ظاهر می‌شود (یعنی، $\{k_n\}$ ، بر طبق نماد ـ گذاری تعریف ۲۰۲ ، تابعی 1-1 از J به J باشد) . قرار می‌دهیم

$$a'_n = a_{k_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

و می‌گوییم $\Sigma a'_n$ یک **تجدید آرایش** Σa_n است .

هرگاه $\{s_n\}$ و $\{s'_n\}$ دنباله های مجموعهای جزئی Σa_n و $\Sigma a'_n$ باشند، بسادگی دیده می‌شود که این دو دنباله ، در حالت کلی ، از اعداد کاملا" متفاوتی تشکیل شده‌اند . لذا ، با این مسئله مواجهیم که معین کنیم تحت چه شرایطی جمیع تجدید آرایشهای یک سری همگرا همگرایند ، و آیا مجموعهای آنها الزاما" یکی است یا نه .

---

1. Abel

۵۳۰۳ مثال . سری همگرای

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots \tag{22}$$

و یکی از تجدید آرایشهای آن

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \cdots \tag{23}$$

را ، که در آن همیشه پس از دو جملهٔ مثبت یک جملهٔ منفی می‌آید ، در نظر می‌گیریم .
هرگاه s مجموع سری (۲۲) باشد ، آنگاه

$$s < 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{6}.$$

چون به ازای هر $k \geq 1$ ،

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} > 0 ,$$

ملاحظه می‌کنیم که $s_3' < s_6' < s_9' < \cdots$ ، که در آن s_n' مجموع جزئی n م سری (۲۳) می‌باشد . ازاینرو ،

$$\limsup_{n\to\infty} s_n' > s_3' = \tfrac{5}{6}.$$

پس (۲۳) یقیناً" همگرا به s نخواهد بود [تحقیق این مطلب که سری (۲۳) بهرحال همگراست به خواننده محول می‌شود] .

این مثال قضیهٔ زیر را ، که منسوب به ریمان[1] است ، روشن می‌سازد .

۵۴۰۳ قضیه . *فرض‌کنیم Σa_n یک سری از اعداد حقیقی باشد که همگرا بوده ولی به طور مطلق همگرا نباشد . همچنین ، فرض می‌کنیم*

$$-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty.$$

دراین صورت ، تجدید آرایشی چون $\Sigma a_n'$ با مجموعهای جزئی s_n' وجود دارد بطوری کـه

$$\liminf_{n\to\infty} s_n' = \alpha, \qquad \limsup_{n\to\infty} s_n' = \beta . \tag{24}$$

برهان . قرار می‌دهیم

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \qquad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

---

1. Riemann

در این صورت، $p_n - q_n = a_n$ ، $p_n + q_n = |a_n|$ ، $p_n \geq 0$ ، $q_n \geq 0$.
سریهای Σp_n و Σq_n هر دو باید واگرا باشند. زیرا هرگاه هر دو همگرا می‌بودند، آنگاه

$$\Sigma(p_n + q_n) = \Sigma|a_n|$$

همگرا می‌شد، که ناقض فرض است. چون

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n ,$$

واگرایی Σp_n و همگرایی Σq_n (یا بعکس) واگرایی Σa_n را ایجاب می‌کنند، که باز ناقض فرض می‌باشد.

حال فرض کنیم $P_1, P_2, P_3, \ldots$ جملات نامنفی Σa_n ، بترتیبی که در سری می‌آیند، و $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ قدر مطلقهای جملات منفی Σa_n ، باز با همان ترتیب اصلیشان در سری، باشند.

سریهای ΣP_n و ΣQ_n فقط درجملات صفر با Σp_n و Σq_n فرق دارند، و لذا، واگرا می‌باشند.

دنباله‌های $\{m_n\}$ و $\{k_n\}$ را طوری خواهیم ساخت که سری

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots \tag{25}$$

$$+ P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \cdots - Q_{k_2} + \cdots ,$$

که بوضوح یک تجدید آرایش Σa_n است، در (۲۴) صدق کند.

برای این کار دنباله‌های حقیقی $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ را طوری اختیار می‌کنیم که $\alpha_n \to \alpha$ ، $\beta_n \to \beta$ ، $\alpha_n < \beta_n$ ، و $\beta_1 > 0$.

فرض کنیم m_1 و k_1 کوچکترین اعداد صحیحی باشند که

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} > \beta_1,$$
$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} < \alpha_1 ;$$

همچنین، m_2 و k_2 را کوچکترین اعداد صحیحی می‌انگاریم که

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} > \beta_2 ,$$

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \cdots - Q_{k_2} < \alpha_2 ;$$

و به همین نحو ادامه می‌دهیم. این کار، به دلیل واگرا بودن ΣP_n و ΣQ_n ، میسر

است .

هرگاه x_n و y_n آن مجموعهای جزئی (۲۵) باشند که جملات آخرشان P_{m_n} و Q_{k_n}-اند ، آنگاه

$$|x_n - \beta_n| \leq P_{m_n}, \qquad |y_n - \alpha_n| \leq Q_{k_n}.$$

چون وقتی $n \to \infty$ ، $P_n \to 0$ و $Q_n \to 0$ ، ملاحظه می‌کنیم که $x_n \to \beta$ و $y_n \to \alpha$.

بالاخره ، واضح است که هیچ عدد کمتر از α یا بیشتر از β نمی‌تواند یک حد زیر-دنباله‌ای مجموعهای جزئی (۲۵) باشد .

۵۵۰۳ قضیه . هرگاه Σa_n یک سری از اعداد مختلط به طور مطلق همگرا باشد ، آنگاه هر تجدید آرایش Σa_n همگراست ، و همه به یک مجموع همگرا می‌باشند .

برهان. فرض کنیم $\Sigma a'_n$ تجدید آرایشی با مجموعهای جزئی s'_n باشد . به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، عدد صحیحی چون N هست بطوری که $m \geq n \geq N$ نامساوی

$$\sum_{i=n}^{m} |a_i| \leq \varepsilon \tag{26}$$

را ایجاب می‌کند . حال p را طوری می‌گیریم که اعداد صحیح $1, 2, \ldots, N$ همه درمیان $k_1, k_2, \ldots, k_p$ باشند (از نمادگذاری تعریف ۵۲۰۳ استفاده می‌کنیم) . در این صورت ، اگر $n > p$ ، اعداد $a_1, \ldots, a_N$ در تفاضل $s_n - s'_n$ حذف می‌شوند . در-نتیجه ، بنابر (۲۶) ، $|s_n - s'_n| \leq \varepsilon$. بنابراین ، $\{s'_n\}$ همگرا به همان مجموع $\{s_n\}$ خواهد شد .

تمرین

۱ . ثابت کنید همگرایی $\{s_n\}$ همگرایی $\{|s_n|\}$ را ایجاب می‌کند . آیا عکس این هم درست است ؟

۲ . $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ را حساب کنید .

۳ . هرگاه $s_1 = \sqrt{2}$ و

$$s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

ثابت کنید $\{s_n\}$ همگراست و به ازای $n=1, 2, 3, \ldots$ ، $s_n < 2$.

۴ . حدود بالایی و پایینی دنبالهٔ $\{s_n\}$ را که به صورت زیر تعریف شده بیابید:

$$s_1 = 0;\ s_{2m} = \frac{s_{2m-1}}{2};\ s_{2m+1} = \frac{1}{2} + s_{2m} .$$

۵ . برای هر دو دنبالهٔ حقیقی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ ثابت کنید

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

مشروط بر اینکه مجموع سمت راست به شکل$\infty - \infty$ نباشد .

۶ . در رفتار (همگرایی یا واگرایی) Σa_n تحقیق کنید هرگاه

(آ) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ؛

(ب) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ ؛

(پ) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ ؛

(ت) به ازای مقادیر مختلط z، $a_n = \dfrac{1}{1+z^n}$.

۷ . ثابت کنید که اگر $a_n \geq 0$ ، همگرایی Σa_n همگرایی $\sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ را ایجاب می‌کند .

۸ . هرگاه Σa_n همگرا و $\{b_n\}$ یکنوا و کراندار باشد ، ثابت کنید که $\Sigma a_n b_n$ همگرا است .

۹ . شعاع همگرایی هر یک از سریهای توانی زیر را بیابید :

(آ) $\sum n^3 z^n$ ؛ (ب) $\sum \dfrac{2^n}{n!} z^n$ ؛

(پ) $\sum \dfrac{2^n}{n^2} z^n$ ؛ (ت) $\sum \dfrac{n^3}{3^n} z^n$.

۱۰ . فرض کنید ضرایب سری‌توانی $\Sigma a_n z^n$ اعداد صحیحی باشند که بی‌نهایت از آنها ناصفرند . ثابت کنید شعاع همگرایی آن حداکثر یک است .

۱۱ . فرض کنید $a_n > 0$ ، $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ ، و Σa_n واگرا باشد .

(آ) ثابت کنید $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ واگراست .

(ب) ثابت کنید

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + \cdots + \frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geq 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}} ,$$

و نتیجه بگیرید که $\sum \dfrac{a_n}{s_n}$ واگرا می‌باشد .

(پ) ثابت کنید

$$\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n},$$

و نتیجه بگیرید که $\sum \frac{a_n}{s_n^2}$ همگراست.

(ت) دربارهٔ

$$\sum \frac{a_n}{1+na_n}, \sum \frac{a_n}{1+n^2a_n}$$

چه می‌توان گفت؟

۱۲ . فرض کنید $a_n > 0$ و Σa_n همگرا باشد. قرار دهید

$$r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m.$$

(آ) ثابت کنید که اگر $m < n$،

$$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} > 1 - \frac{r_n}{r_m},$$

و نتیجه بگیرید که $\sum \frac{a_n}{r_n}$ واگراست.

(ب) ثابت کنید

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}),$$

و نتیجه بگیرید که $\sum \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ همگراست.

۱۳ . ثابت کنید که حاصل ضرب کشی دو سری به طور مطلق همگرا به طور مطلق همگرا است.

۱۴ . چنانچه $\{s_n\}$ دنبالهٔ مختلطی باشد، میانگینهای حسابی آن σ_n ها را با

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

تعریف می‌کنیم.

(آ) هرگاه $\lim s_n = s$، ثابت کنید $\lim \sigma_n = s$.

(ب) دنبالهٔ $\{s_n\}$ را قسمی بسازید که در عین اینکه $\lim \sigma_n = 0$ همگرا نباشد.

(پ) آیا می‌شود به ازای هر n، $s_n > 0$ و، با اینکه $\lim \sigma_n = 0$، داشته باشیم $\limsup s_n = \infty$؟

(ت) به ازای هر $n \geq 1$ قرار دهید $a_n = s_n - s_{n-1}$. نشان دهید که

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k a_k.$$

فرض کنید $\lim(na_n)=0$ و $\{\sigma_n\}$ همگرا باشد. ثابت کنید $\{s_n\}$ همگرا است. [این عکس‌قسمت (آ) را به دست می‌دهد منتها با فرض اضافی $na_n \to 0$.]

(ث) آخرین نتیجه‌را از این فرض ضعیفتر به دست آورید: فرض کنید $M<\infty$، به ازای هر n، $|na_n|\le M$، و $\lim \sigma_n=\sigma$. با تکمیل شرح مختصر زیر، ثابت کنید: $\lim s_n=\sigma$

هرگاه $m<n$، آنگاه

$$s_n-\sigma_n=\frac{m+1}{n-m}(\sigma_n-\sigma_m)+\frac{1}{n-m}\sum_{i=m+1}^{n}(s_n-s_i).$$

برای این i ها،

$$|s_n-s_i|\le\frac{(n-i)M}{i+1}\le\frac{(n-m-1)M}{m+2}.$$

$\varepsilon>0$ ثابتی اختیار کرده، به هر n عدد صحیح m را طوری مربوط نمایید که در

$$m\le\frac{n-\varepsilon}{1+\varepsilon}<m+1$$

صدق کند. در این صورت، $(m+1)/(n-m)\le 1/\varepsilon$ و $|s_n-s_i|<M\varepsilon$. ازاینرو،

$$\limsup_{n\to\infty}|s_n-\sigma|\le M\varepsilon.$$

چون ε دلخواه بود، پس $\lim s_n=\sigma$.

۱۵. تعریف ۲۱۰۳ را می‌توان به‌حالتی که a_n در R^k ی ثابتی قرار دارد تعمیم داد. در اینجا همگرایی مطلق همان همگرایی $\Sigma|a_n|$ تعریف می‌شود. نشان دهید که قضایای ۲۲۰۳، ۲۳۰۳، ۲۵۰۳ (آ)، ۳۳۰۳، ۳۴۰۳، ۴۲۰۳، ۴۵۰۳، ۴۷۰۳، و ۵۵۰۳ در این محدودهٔ کلیتر برقرارند. (در هر برهان فقط اصلاحات مختصری نیاز است.)

۱۶. عدد مثبت α را ثابت نگهدارید. x_1 را بزرگتر از $\sqrt{\alpha}$ گرفته، x_2، x_3، x_4، ... را با فرمول بازگشتی

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\alpha}{x_n}\right)$$

تعریف کنید.

(آ) ثابت کنید $\{x_n\}$ نزول می‌کند و $\lim x_n=\sqrt{\alpha}$.

(ب) قرار دهید $\varepsilon_n=x_n-\sqrt{\alpha}$، و نشان دهید که

$$\varepsilon_{n+1}=\frac{\varepsilon_n^2}{2x_n}<\frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}.$$

پس، با فرض $\beta = 2\sqrt{\alpha}$ ، خواهید داشت

$$\varepsilon_{n+1} < \beta\left(\frac{\varepsilon_1}{\beta}\right)^{2^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

(پ) این دستور العمل خوبی است برای محاسبهٔ ریشه‌های دوم ، زیرا فرمول بازگشتی ساده و همگرایی بی‌نهایت سریع صورت می‌گیرد . به عنوان مثال ، اگــر $\alpha = 3$ و $x_1 = 2$ ، نشان دهید که $\varepsilon_1/\beta < \frac{1}{10}$ ، و لذا ،

$$\varepsilon_5 < 4 \cdot 10^{-16}, \qquad \varepsilon_6 < 4 \cdot 10^{-32}.$$

۱۷ . $\alpha > 1$ را ثابت نگهدارید . x_1 را بزرگتر از $\sqrt{\alpha}$ گرفته ، تعریف کنید

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + x_n}{1 + x_n} = x_n + \frac{\alpha - x_n^2}{1 + x_n}.$$

(آ) ثابت کنید $x_1 > x_3 > x_5 > \cdots$.

(ب) ثابت کنید $x_2 < x_4 < x_6 < \cdots$.

(پ) ثابت کنید $\lim x_n = \sqrt{\alpha}$.

(ت) سرعت همگــرایی ایــن فرایند را با فرایند وصف شده در تمرین ۱۶ مقایسه نمایید .

۱۸ . فرمول بازگشتی تمرین ۱۶ را با

$$x_{n+1} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{\alpha}{p} x_n^{-p+1},$$

که در آن p عدد صحیح مثبت ثـابتی است ، عــوض کرده رفتــار دنبالهٔ $\{x_n\}$ حاصل را توصیف نمایید .

۱۹ . به هر دنبالهٔ $a = \{\alpha_n\}$ ، که در آن α_n مساوی 0 یا 2 است ، عدد حقیقی

$$x(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}$$

را مربوط نمایید . ثابت کنید مجموعهٔ تمام $x(a)$ ها دقیقا " همان مجموعهٔ کانتور است که در بخش ۲ . ۴۴ توصیف شد .

۲۰ . فرض کنید $\{p_n\}$ یک دنبالهٔ کشــی در فضــای متــری X ، و زیــر دنباله‌ای از آن مانـند $\{p_{n_i}\}$ به نقطهٔ $p \in X$ همگرا باشد . ثابت کنید تمام دنبالهٔ $\{p_n\}$ همگرا به p خواهد بود .

۲۱ . قضیهٔ زیر را که مشابه قضیهٔ ۳ . ۱۰ (ب) است ثابت کنید : هرگاه $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته و کراندار در فضای متری تام X باشد ، $E_n \supset E_{n+1}$ ، و

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} E_n = 0,$$

آنگاه $\bigcap_1^\infty E_n$ فقط از یک نقطه تشکیل شده است.

۲۲ . فرض کنید X یک فضای متری تام ، و $\{G_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های باز و چگال X باشد. قضیهٔ بئر را ثابت کنید ؛ یعنی ، ثابت کنید $\bigcap_1^\infty G_n$ تهی نیست. (درواقع ، این مجموعه در X چگال است). **راهنمایی**: دنباله‌ای از همسایگیهای منقبض مانند E_n را بیابید بطوری که $\bar{E}_n \subset G_n$ ، و تمرین ۲۱ را به‌کار برید.

۲۳ . فرض کنید $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ دنباله‌هایی کشی درفضای متری X باشند. نشان‌دهید که دنبالهٔ $\{d(p_n, q_n)\}$ همگراست. **راهنمایی**: به ازای هر m و n ،

$$d(p_n, q_n) \le d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, q_n)$$

از این نتیجه می‌شود که اگر m و n بزرگ باشند ،

$$|d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m)|$$

کوچک خواهد بود.

۲۴ . فرض کنید X یک فضای متری باشد.

(آ) دو دنبالهٔ کشی $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ در X را **هم‌ارز** نامند هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = 0.$$

ثابت کنید این یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

(ب) فرض کنید X^* مجموعهٔ تمام رده‌های هم‌ارزیی باشد که این طور به دست می‌آیند. چنانچه $P \in X^*$ ، $Q \in X^*$ ، $\{p_n\} \in P$ ، و $\{q_n\} \in Q$ ، تعریف کنید

$$\Delta(P, Q) = \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n).$$

این حد ، بنابر تمرین ۲۳ ، وجود دارد. نشان دهید که اگر $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ با دنباله‌هایی هم‌ارز خود عوض شوند ، عدد $\Delta(P, Q)$ تغییری نمی‌کند ، ولذا ، Δ یک تابع فاصله در X^* می‌باشد.

(پ) ثابت کنید فضای متری X^* حاصل تام است.

(ت) به ازای هر $p \in X$ ، دنباله‌ای کشی هست که تمام جملات آن p اند. فرض کنید P_p آن عنصر از X^* باشد که حاوی این دنباله است. ثابت کنید به ازای

هر $p, q \in X$،

$$\Delta(P_p, P_q) = d(p, q).$$

به عبارت دیگر، نگاشت φ که با $\varphi(p) = P_p$ تعریف می‌شود یک **یکمتری** (یعنی نگاشتی حافظ فاصله) از X بتوی X^* می‌باشد.

(ث) ثابت کنید $\varphi(X)$ در X^* چگال است و، در صورت تام بودن X، $\varphi(X) = X^*$. بنابر (ت)، می‌توان X و $\varphi(X)$ را یکی کرد؛ و در نتیجه، X را به این صورت که در فضای متری تام X^* نشانیده شده در نظر گرفت. فضای X^* را **تتمیم** X می‌نامیم.

۲۵. فرض کنید X آن فضای متریی باشد که نقاطش اعداد گویا و متر آن $d(x, y) = |x - y|$ است. تتمیم این فضا چیست؟ (قس. تمرین ۲۴).

۴

پیوستگی

مفهوم تـابع و چنـد اصطلاح مربوط به آن در تعریفهای ۲۰۱ و ۲۰۲ معرفی شدند. با اینکه ما (درفصلهای بعد) عمدتا "به‌توابع حقیقی و مختلط (یعنی، تابعهایی که مقادیرشان اعدادی حقیقی یا مختلط اند) نظر داریم، لکن‌توابع برداری (یعنی، توابعی با مقادیر در R^k) وتابعهایی‌که مقادیرشان دریک فضای متری دلخواه هستندرا نیز مطرح‌خواهیم‌کرد. قضایای ما دراین محدودهٔ کلی مثلا" با مقید شدن به توابع حقیقی شکل ساده‌تری نمی‌یابند. در واقع، بـازدودن مفروضات ناضرور و بیان و اثبات قضایا در یک زمینهٔ کلی مناسب است که چهرهٔ بحث ساده و روشن خواهد شد.

قلمروهای تعریف توابع ما نیزفضاهای‌متری‌خواهند بود، که در موارد مختلف وضع خاص مناسبی به خود می‌گیرند.

حدود توابع

۱۰۴ تعریف. فرض کنیم X و Y فضاهایی متری باشند. همچنین، $E \subset X$، f مجموعهٔ E را بتوی Y بنگارد، و p یک‌نقطهٔ حدی E باشد. می‌نویسیم وقتی $x \to p$، $f(x) \to q$، یا

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \tag{1}$$

هرگاه نقطه‌ای مانند $q \in Y$ با خاصیت زیروجود داشته باشد: به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ ای باشد بطوری که رابطهٔ

$$d_Y(f(x), q) < \varepsilon \tag{2}$$

برای هر $x \in E$ که

$$0 < d_X(x, p) < \delta \tag{3}$$

برقرار گردد.

علامات d_X و d_Y بترتیب اشاره به فاصله ها در X و Y دارند.

هرگاه X و (یا) Y را با خط حقیقی، صفحهٔ مختلط، یا فضای اقلیدسی R^k ای عوض‌کنیم، فاصله های d_X و d_Y بی شک با قدر مطلقها و یا نرمهای مناسبی عوض می‌شوند (ر.ک. بخش ۱۶۰۲).

لازم است قید کنیم که در تعریف بالا $p \in X$ ولی p لزوما" نقطه‌ای از E نیست. بعلاوه، حتی اگر $p \in E$، باز ممکن است داشته باشیم $f(p) \neq \lim_{x \to p} f(x)$.

این تعریف را می‌توان برحسب حدود دنباله ها از نو طرح کرد:

۲۰۴ قضیه. فرض کنیم X، Y، E، f، و p همانهایی باشند که در تعریف ۱۰۴ آمده‌اند. در این صورت،

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \tag{4}$$

اگر و فقط اگر رابطهٔ

$$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q \tag{5}$$

به‌ازای هر دنبالهٔ $\{p_n\}$ در E که

$$p_n \neq p, \qquad \lim_{n \to \infty} p_n = p \tag{6}$$

برقرار باشد.

برهان. فرض کنیم (۴) برقرار باشد. $\{p_n\}$ را در E طوری اختیار می‌کنیم که در (۶) صدق کند. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت، $\delta > 0$ ای وجود دارد بطوری که اگر $x \in E$ و $0 < d_X(x, p) < \delta$، داریم $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$. همچنین، N ی هست بقسمی که $n > N$ نامساویهای $0 < d_X(p_n, p) < \delta$ را ایجاب می‌کند. بنابراین، به‌ازای

$n > N$ خواهیم داشت $d_Y(f(p_n), q) < \varepsilon$ ، که نشانگر برقراری (۵) می‌باشد.
بعکس، فرض کنیم (۴) درست نباشد. پس $\varepsilon > 0$ ی هست بطوری که به‌ازای هر $\delta > 0$ ی نقطه‌ای مانند $x \in E$ (وابسته به δ) وجود دارد که برای آن $d_Y(f(x), q) \geq \varepsilon$ ولی $0 < d_X(x, p) < \delta$. بنابراین، با اختیار $\delta_n = 1/n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$)، به دنباله‌ای در E و صادق در (۶) دست می‌یابیم که برای آن رابطهٔ (۵) درست نیست.

نتیجه. هرگاه f در p حد داشته باشد، این حد منحصر بفرد است.
این مطلب از قضایای ۲۰۳ (ب) و ۲۰۴ به دست خواهد آمد.

۳۰۴ تعریف. فرض‌کنیم دوتابع مختلط f و g را داریم که هر دو بر E تعریف شده‌اند. منظورما از $f + g$ یعنی تابعی‌که به هر نقطهٔ x از E عدد $f(x) + g(x)$ را نسبت می‌دهد. بهمین‌نحو، تفاضل $f - g$، حاصل‌ضرب fg، و خارج قسمت f/g. دو تابع را تعریف می‌کنیم با این فرض که خارج قسمت فقط در آن نقاط x از E تعریف شده که در آنها $g(x) \neq 0$. هرگاه f به هر نقطهٔ x از E عدد c را نسبت دهد، f را یک ***تابع ثابت***، یا فقط یک ***ثابت***، نامیده می‌نویسیم $f = c$. چنانچه f و g توابعی حقیقی باشند و به‌ازای هر $x \in E$، $f(x) \geq g(x)$، گاهی جهت اختصار خواهیم نوشت $f \geq g$.

بهمین نحو، اگر $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$، E را بتوی R^k بنگارند، $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ و $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ را با

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x), (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x)$$

تعریف می‌کنیم، و چنانچه λ عددی حقیقی باشد، قرار می‌دهیم $(\lambda\mathbf{f})(x) = \lambda\mathbf{f}(x)$.

۴۰۴ قضیه. *فرض کنیم $E \subset X$ ، X یک فضای متری، p یک نقطهٔ حدی E ، f و g توابع مختلطی بر E باشند، و داشته باشیم*

$$\lim_{x \to p} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to p} g(x) = B.$$

در این صورت،

(آ) $\lim_{x \to p} (f + g)(x) = A + B$ ؛

(ب) $\lim_{x \to p} (fg)(x) = AB$ ؛

(پ) *هرگاه* $B \neq 0$ ، $\lim_{x \to p} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$.

برهان. در پرتو قضیهٔ ۲۰۴، ایــن احکام فوراً از خواص مشابهشان در مورد دنباله ها (قضیهٔ ۳۰۳) نتیجه می‌شوند.

تبصره. هرگاه $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$، E را بتوی R^k بنگارند، (آ) به‌قوت‌خود باقی است و (ب) به صورت زیر در می‌آید.

(ب) $\lim_{x \to p} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(x) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$:

(قس. قضیهٔ ۴۰۳.)

توابع پیوسته

۵۰۴ تعریف. فرض کنیم X و Y فضاهایی متری بوده، $E \subset X$، $p \in E$، و f مجموعهٔ E را بتوی Y بنگارد. در ایــن صورت، f را **در** p **پیوسته** نامند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ ای باشد بقسمی که به ازای تمام نقاط $x \in E$ که $d_X(x, p) < \delta$ داشتــه بــاشیـــم

$$d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

هرگاه f در هر نقطهٔ E پیوسته باشد، f **بر** E **پیوسته** خوانده خواهد شد.

باید توجه‌داشت‌که برای پیوسته‌بودن‌در p، f باید دراین نقطه تعریف شده باشد. (قس. تبصرهٔ بعد از تعریف ۱۰۴.)

هرگاه p یک نقطهٔ تنهــای E باشد، تعریف ما ایجاب خواهد کرد که هر تابع f با قلمرو تعریف E در p پیوسته است. زیرا هر ε مثبتی که‌اختیارکنیم، می‌توانیم چنان δ ی مثبتی‌را برگزینیم که تنها نقطهٔ $x \in E$ که به‌ازای آن $d_X(x, p) < \delta$، $x = p$ باشد. در این صورت،

$$d_Y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon.$$

۶۰۴ قضیه. *دروضعیت‌تعریف ۵۰۴، فرض‌می‌کنیم p یک‌نقطهٔ حدی E نیز باشد. دراین صورت، f در p پیوسته است اگر و فقط اگر $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.*

برهان. اگــر تعــریفهای ۱۰۴ و ۵۰۴ را با هم مقایسه کنیم، این مطلب واضح خواهدشد.

حال به‌ترکیب‌توابع می‌پردازیم. قضیهٔ زیر خلاصه‌اش این است که هر تابع پیوسته

از یک تابع پیوسته پیوسته است .

۷۰۴ قضیه . فرض کنیم X ، Y ، و Z فضاهایی متری باشند ، $E \subset X$ ، f مجموعهٔ E را بتوی Y بنگارد ، g برد f ، یعنی $f(E)$ ، را بتوی Z بنگارد ، و h نگاشتی از E بتوی Z باشد که با

$$h(x) = g(f(x)) \qquad (x \in E)$$

تعریف شده است . در این صورت ، هرگاه f در نقطهٔ $p \in E$ و g در نقطهٔ $f(p)$ پیوسته باشد ، آنگاه h در p پیوسته خواهد بود .

این تابع h را **ترکیب** یا **مرکبهٔ** f و g می‌نامند . در این مورد اغلب نماد

$$h = g \circ f$$

به کار برده می‌شود .

برهان . فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند . چون g در $f(p)$ پیوسته است ، $\eta > 0$ ای هست بقسمی که

اگر $d_Y(y, f(p)) < \eta$ و $y \in f(E)$ ، داریم $d_Z(g(y), g(f(p))) < \varepsilon$.

و از آنجا که f در p پیوسته است ، δ ی مثبتی وجود دارد بطوری که

اگر $d_X(x, p) < \delta$ و $x \in E$ ، داریم $d_Y(f(x), f(p)) < \eta$.

از اینها نتیجه می‌شود که اگر $d_X(x, p) < \delta$ و $x \in E$ ، خواهیم داشت

$$d_Z(h(x), h(p)) = d_Z(g(f(x)), g(f(p))) < \varepsilon .$$

بنابراین ، h در p پیوسته می‌باشد .

۸۰۴ قضیه . نگاشت f از فضای متری X بتوی فضای متری Y بر X پیوسته است اگر و فقط اگر به‌ازای هر مجموعهٔ باز V در Y ، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد .

(نقشهای معکوس در تعریف ۲۰۲ معرفی شده‌اند .) این قضیه توصیف کنندهٔ بسیار مفیدی از پیوستگی می‌باشد .

برهان . فرض کنیم f بر X پیوسته و V مجموعهٔ بازی در Y باشد . باید نشان دهیم که هر نقطهٔ $f^{-1}(V)$ یک نقطهٔ درونی $f^{-1}(V)$ است . لذا ، فرض می‌کنیم $p \in X$ و $f(p) \in V$. چون V باز است ، ε مثبتی هست بقسمی که اگر $d_Y(f(p), y) < \varepsilon$ ، $y \in V$. و از آنجا که f در p پیوسته است ، δ ی مثبتی وجود دارد بطوری که اگر $d_X(x, p) < \delta$ ،

$d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$. پس، به محض اینکه $d_X(x, p) < \delta$ ، خواهیم داشت $x \in f^{-1}(V)$.

بعکس، فرض کنیم به‌ازای هر مجموعهٔ باز V در Y ، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد. p ای در X و ε ی مثبت‌را ثابت گرفته، فرض می‌کنیم V مجموعهٔ تمام y هایی در Y باشد که $d_Y(y, f(p)) < \varepsilon$. در این صورت، V باز است. ازاینرو، $f^{-1}(V)$ نیزباز خواهد بود. درنتیجه، δ ی‌مثبتی هست که به محض آنکه $d_X(p, x) < \delta$ داریم $x \in f^{-1}(V)$. اما، هرگاه $x \in f^{-1}(V)$ ، آنگاه $f(x) \in V$. پس $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$. این‌برهان را تمام خواهد کرد.

نتیجه. *نگاشت f از فضای متری X بتوی فضای متری Y پیوسته است اگر و فقط‌اگر به‌ازای هر مجموعهٔ بستهٔ C در Y ، $f^{-1}(C)$ در X بسته باشد.*

این نتیجه از قضیهٔ بالا حاصل می‌شود، زیرا یک مجموعه بسته است اگر و فقط‌اگر متمم آن باز باشد، و نیز به ازای هر $E \subset Y$ ، $f^{-1}(E^c) = [f^{-1}(E)]^c$.

حال به توابع مختلط‌وبرداری‌و نیز تابعهایی که بر زیر مجموعه‌هایی از R^k تعریف شده‌اند می‌پردازیم.

۹۰۴ قضیه. *فرض‌کنیم f و g توابع مختلط پیوسته‌ای بر فضای متری X باشند. در این صورت، $f+g$ ، fg ، و f/g بر X پیوسته خواهند بود.*

البته، در آخرین حالت، باید فرض کنیم به‌ازای هر $x \in X$ ، $g(x) \neq 0$.

برهان. درنقاط تنهای X چیزی برای‌اثبات وجود ندارد. در نقاط حدی، حکم از قضایای ۴۰۴ و ۶۰۴ به دست خواهد آمد.

۱۰۰۴ قضیه

(آ) فرض‌کنیم f_1 ، . . . ، f_k توابعی حقیقی بر فضای متری X و $\mathbf{f}$ آن نگاشت از X بتوی R^k باشد که با

$$\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \qquad (x \in X) \tag{7}$$

تعریف می‌شود . در این صورت ، f پیوسته است اگر و فقط اگر هر یک از توابع f_1، ... ، f_k پیوسته باشد .

(ب) هرگاه f و g نگاشتهای پیوسته‌ای از X بتوی R^k باشند ، $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ و $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ بر X پیوسته خواهند بود .

توابع $f_1, \ldots, f_k$ را مؤلفه‌های f می‌نامند . توجه کنید که $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ نگاشتی بتوی R^k است ، حال آنکه $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ یک تابع حقیقی بر X می‌باشد .

برهان. قسمت (آ) از نامساویهای

$$|f_j(x)-f_j(y)| \leq |\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(y)| = \left\{\sum_{i=1}^{k} |f_i(x)-f_i(y)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

به‌ازای $j=1, \ldots, k$ به دست می‌آید . قسمت (ب) از (آ) و قضیهٔ ۹۰۴ نتیجه خواهد شد .

۱۱۰۴ چند مثال. هرگاه $x_1, \ldots, x_k$ مختصات نقطهٔ $\mathbf{x}\in R^k$ باشند ، توابع ϕ_i که با

$$\phi_i(\mathbf{x}) = x_i \qquad (\mathbf{x}\in R^k) \tag{8}$$

تعریف می‌شوند بر R^k پیوسته‌اند ، زیرا نامساوی

$$|\phi_i(\mathbf{x})-\phi_i(\mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

نشان می‌دهد که در تعریف ۵۰۴ می‌توان δ را ε گرفت . تابعهای ϕ_i را گاهی **توابع مختصی** می‌نامند .

پس، با چند بار استفاده از قضیهٔ ۹۰۴ ، معلوم می‌شود که هر تکجمله‌ای

$$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k} \tag{9}$$

که در آن $n_1, \ldots, n_k$ اعدادی صحیح و نامنفی هستند ، بر R^k پیوسته است . همین مطلب در مورد مضارب ثابت (۹) نیز درست است ، زیرا ثابتها بوضوح پیوسته می‌باشند . از این نتیجه می‌شود که هر چند جمله‌ای P ، که با

$$P(\mathbf{x}) = \Sigma c_{n_1\cdots n_k} x_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k} \qquad (\mathbf{x}\in R^k) \tag{10}$$

داده شود ، بر R^k پیوسته خواهد بود . در اینجا ضرایب $c_{n_1\cdots n_k}$ اعدادی مختلط ، $n_1, \ldots, n_k$ اعدادی صحیح و نامنفی ، و مجموع مذکور در (۱۰) تعدادی متناهی جمله

دارد.

علاوه بر این، هرتابع گویا از $x_1, \ldots, x_k$ ، یعنی، هرخارج‌قسمت دو چندجمله‌ای به شکل (۱۰)، بر R^k هرجا که مخرج مخالف صفر است، پیوسته می‌باشد.

از نامساوی مثلثی به‌آسانی دیده می‌شود که

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \le |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^k). \tag{11}$$

پس نگاشت $\mathbf{x} \to |\mathbf{x}|$ یک تابع حقیقی و پیوسته بر R^k است.

حال اگر $\mathbf{f}$ یک نگاشت پیوسته از فضای متری X بتوی R^k باشد، و ϕ بر X با $\phi(p) = |\mathbf{f}(p)|$ تعریف شود، از قضیهٔ ۷۰۴ نتیجه خواهد شد که ϕ یک تابع حقیقی و پیوسته بر X می‌باشد.

۱۲۰۴ تبصره. ما مفهوم پیوستگی‌را برای‌توابعی تعریف‌کردیم که بر یک **زیرمجموعه** چون E از فضای متری X تعریف شده‌اند. لکن‌در این تعریف متمم E در X هیچ نقشی رانداشت (توجه کنید که وضع در مورد حدود توابع قدری متفاوت بود). لذا، با حذف متمم‌از قلمرو f چیز قابل توجهی از کف نخواهد رفت. این یعنی که می‌توان، علاوه بر نگاشتها از زیرمجموعه‌ها، درباب نگاشتهای پیوسته از یک فضای متری در دیگری نیز سخن گفت. این عمل بیان و برهان برخی از قضایا را ساده خواهد کرد. ما قبلاً در قضایای ۸۰۴ تا ۱۰۰۴ از این اصل استفاده کرده‌ایم، و در بخش زیر که دربارهٔ فشردگی است به این کار ادامه خواهیم داد.

پیوستگی و فشردگی

۱۳۰۴ تعریف. نگاشت $\mathbf{f}$ از مجموعهٔ E بتوی R^k را *کراندار* نامند هرگاه عددی حقیقی مثل M باشد بطوری که به ازای هر $x \in E$ ، $|\mathbf{f}(x)| \le M$.

۱۴۰۴ قضیه. فرض‌کنیم f یک‌نگاشت‌پیوسته از فضای متری و فشردهٔ X بتوی فضای متری Y باشد. در این صورت، $f(X)$ فشرده خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $\{V_\alpha\}$ پوشش بازی از $f(X)$ باشد. چون f پیوسته است، قضیهٔ ۸۰۴ نشان می‌دهد که هریک ازمجموعه‌های $f^{-1}(V_\alpha)$ باز است. واز آنجا که X فشرده است،

تعدادی متناهی اندیس، مثلا" ، $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ، وجود دارند بطوری که

$$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}). \tag{12}$$

چون به ازای هر $E \subset Y$ ، $f(f^{-1}(E)) \subset E$ ، پس (۱۲) ایجاب می‌کند که

$$f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}. \tag{13}$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

توجه: ما از رابطهٔ $f(f^{-1}(E)) \subset E$، که به ازای هر $E \subset Y$ معتبر است، استفاده کرده‌ایم. هرگاه $E \subset X$، آنگاه $f^{-1}(f(E)) \supset E$. درهیچیک از این حالات لزومی به برقراری تساوی نیست.

حال از قضیهٔ ۱۴۰۴ چند نتیجه به دست می‌آوریم.

۱۵۰۴ قضیه. هرگاه f یک نگاشت پیوسته از فضای متری فشردهٔ X بتوی R^k باشد، آنگاه $f(X)$ بسته و کراندار است. لذا، f کراندار خواهد بود.

این از قضیهٔ ۴۱۰۲ به دست می‌آید. این نتیجه بخصوص وقتی f حقیقی است اهمیت دارد:

۱۶۰۴ قضیه. فرض کنیم f یک تابع حقیقی پیوسته بر فضای متری و فشردهٔ X باشد، و

$$M = \sup_{p \in X} f(p), \qquad m = \inf_{p \in X} f(p). \tag{14}$$

در این صورت، نقاطی مانند $p, q \in X$ هستند بطوری که $f(p) = M$ و $f(q) = m$.

نمادهای (۱۴) به این معنی‌اند که M کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ تمام اعدادی چون $f(p)$ است که در آنها p روی X تغییر می‌کند، و m بزرگترین کران پایینی همین مجموعه از اعداد می‌باشد.

این نتیجه به صورت زیر نیز قابل بیان است: **نقاطی مانند p و q در X وجود دارند بطوری که به‌ازای هر $x \in X$، $f(q) \le f(x) \le f(p)$؛ یعنی، f به ماکزیمم خود (در p) و به مینیمم خود (در q) می‌رسد.**

برهان. بنابر قضیهٔ ۱۵۰۴، $f(X)$ مجموعه‌ای است بسته و کراندار از اعداد حقیقی. پس، بنابر قضیهٔ ۲۸۰۲، $f(X)$ شامل

$$M = \sup f(X) \quad , \quad m = \inf f(X)$$

می‌باشد .

۱۷۰۴ قضیه . *فرض کنیم f یک نگاشت 1-1 پیوسته از فضای متری و فشردهٔ X بـروی فضای متری Y باشد . در این صورت ، نگاشت معکوس f^{-1} ، که بر Y با*

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad (x \in X)$$

تعریف می‌شود ، یک نگاشت پیوسته از Y بروی X است .

برهان . با اعمال قضیهٔ ۸۰۴ در مورد f^{-1} به جای f ، می‌بینیم کافی است ثابت شود که به ازای هـر مجمـوعهٔ بـاز V در X ، $f(V)$ یک مجمـوعهٔ بـاز در Y است . از ایـن V ها یکی اختیار و آن را ثابت می‌گیریم .

چون متمم V^c ی مجموعهٔ V در X بسته است ، پس فشرده است (قضیهٔ ۳۵۰۲) . لذا ، $f(V^c)$ زیرمجمـوعهٔ فشرده‌ای از Y بوده (قضیهٔ ۱۴۰۴) ؛ درنتیجـه ، در Y بسته می‌باشد (قضیهٔ ۳۴۰۲) . چون f یک‌به‌یک وبروا ست ، پس $f(V)$ متمم $f(V^c)$ است. بنابر این ، $f(V)$ باز می‌باشد .

۱۸۰۴ تعریف . فرض کنیم f یک نگاشت از فضای متری X بتوی فضای متری Y باشد . می‌گوییم f بر X **به طور یکنواخت پیوسته** است هرگاه بـه‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، δ ی مثبتی باشد بطوری که به‌ازای هر p و هر q در X که $d_X(p,q) < \delta$ داشته باشیم

$$d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon . \tag{15}$$

حال به‌تفاوتهای موجود میان مفاهیم پیوستگی و پیوستگی یکنواخت نظر می‌اندازیم . اولاً ، پیوستگی یکنواخت خاصیتی از یک تابع بر یک مجموعه است ، حال آنکه پیوستگی را می‌شود در یک نقطه هم تعریف کرد . اینکه بپرسیم تابعی در یک نقطهٔ معین به‌طور یکنواخت پیوسته هست یا نه بی‌معنی است . ثانیاً ، هرگاه f بر X پیوسته باشد ، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر نقطهٔ p از X می‌توان عددی مانند $\delta > 0$ را طوری یافت که از خاصیت مذکور در تعریف ۵۰۴ برخوردار باشد . این δ هم به ε و هم به p بستگی دارد . اما ، اگـر f بر X به‌طور یکنواخت پیوسته باشد ، می‌توان به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ یک δ ی مثبت یافت که در تعریف پیوستگی برای تمام نقـاط p از X مناسب باشد .

واضح است که هر تابع به طور یکنواخت پیوسته پیوسته است. اینکه این دو مفهوم بر مجموعه‌های فشرده معادلند از قضیهٔ بعدی نتیجه می‌شود.

۱۹.۴ قضیه. *فرض‌کنیم f یک‌نگاشت پیوسته از فضای متری و فشردهٔ X بتوی فضای متری Y باشد. در این صورت، f بر X به طور یکنواخت پیوسته است.*

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند. چون f پیوسته است، می‌توان به هر نقطهٔ $p \in X$ عدد مثبت $\phi(p)$ را قسمی مربوط‌کرد که

$q \in X$ و $d_X(p, q) < \phi(p)$ نامساوی $d_Y(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2}$ را ایجاب کنند. (16)

فرض کنیم $J(p)$ مجموعهٔ تمام q هایی در X باشد که برای آنها

$$d_X(p, q) < \tfrac{1}{2}\phi(p). \tag{17}$$

چون $p \in J(p)$، پس گردآیهٔ تمام مجموعه‌های $J(p)$ یک پوشش باز X می‌باشد. و چون X فشرده است، مجموعه‌ای متناهی متشکل از نقاط $p_1, \ldots, p_n$ در X هست بطوری که

$$X \subset J(p_1) \cup \cdots \cup J(p_n). \tag{18}$$

قرار می‌دهیم

$$\delta = \tfrac{1}{2} \min\, [\phi(p_1), \ldots, \phi(p_n)]. \tag{19}$$

در این صورت، $\delta > 0$. (این یکی از جاهایی است که متناهی بودن پوشش، که در ذات تعریف فشردگی است، لازم می‌شود. مینیمم یک مجموعهٔ متناهی از اعداد مثبت مثبت است، حال آنکه اینفیمم یک مجموعهٔ نامتناهی از اعداد مثبت ممکن است 0 هم باشد.)

حال فرض کنیم p و q چنان نقاطی از X باشند که $d_X(p, q) < \delta$. بنابر (۱۸)، عدد صحیحی مثل m هست، که $1 \le m \le n$ بطوری‌که $p \in J(p_m)$. درنتیجه،

$$d_X(p, p_m) < \tfrac{1}{2}\phi(p_m). \tag{20}$$

و نیز داریم

$$d_X(q, p_m) \le d_X(p, q) + d_X(p, p_m) < \delta + \tfrac{1}{2}\phi(p_m) \le \phi(p_m).$$

بالاخره، (۱۶) نشان می‌دهد که

$$d_Y(f(p), f(q)) \le d_Y(f(p), f(p_m)) + d_Y(f(q), f(p_m)) < \varepsilon.$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

برهان دیگری در تمرین ۱۰ مختصرا" شرح داده شده است.

حال نشان می‌دهیم که در مفروضات قضایای ۱۴۰۴، ۱۵۰۴، ۱۶۰۴، و ۱۹۰۴ فشردگی لازم است.

۲۰۰۴ قضیه. *فرض کنیم E یک مجموعهٔ ناقشرده در R^1 باشد. در این صورت،*
(آ) تابعی پیوسته بر E هست که کراندار نیست؛
(ب) تابعی پیوسته و کراندار بر E هست که ماکزیمم ندارد.
هرگاه، علاوه بر این، E کراندار هم باشد، آنگاه
(پ) تابع پیوسته‌ای بر E هست که به طور یکنواخت پیوسته نمی‌باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم E کراندار باشد. درنتیجه، یک نقطهٔ حدی مانند x_0 از E هست که نقطه‌ای از E نیست. تابع

$$f(x) = \frac{1}{x - x_0} \qquad (x \in E) \tag{21}$$

را در نظر می‌گیریم. این تابع بر E پیوسته است (قضیهٔ ۹۰۴)، اما بوضوح کراندار نیست. برای اثبات اینکه (۲۱) به طور یکنواخت پیوسته نیست، فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ دلخواه باشند، و نقطه‌ای مانند x در E را قسمی اختیار می‌کنیم که $|x - x_0| < \delta$. می‌توان با اختیار t به قدر کافی نزدیک x_0، ضمن اینکه $|t - x| < \delta$، تفاضل $|f(t) - f(x)|$ را از ε بزرگتر کرد. چون این مطلب برای هر $\delta > 0$ درست است، پس f بر E به طور یکنواخت پیوسته نمی‌باشد.

تابع g که با

$$g(x) = \frac{1}{1 + (x - x_0)^2} \qquad (x \in E) \tag{22}$$

داده شده بر E پیوسته است و، چون $0 < g(x) < 1$، کراندار می‌باشد. واضح است که

$$\sup_{x \in E} g(x) = 1,$$

حال آنکه به ازای هر $x \in E$، $g(x) < 1$. پس g بر E ماکزیمم ندارد.

حال که قضیه برای مجموعه‌های کراندار E ثابت شده، با اجازهٔ شما فرض می‌کنیم E بی‌کران باشد. در این صورت، $f(x) = x$ قسمت (آ) را ثابت می‌کند، در حالی که

$$h(x) = \frac{x^2}{1 + x^2} \qquad (x \in E) \tag{23}$$

قسمت (ب) را تأیید خواهد کرد، زیرا

$$\sup_{x \in E} h(x) = 1$$

و، به‌ازای هر $x \in E$ ، $h(x) < 1$.

اگر کراندار بودن از مفروضات حذف‌شده بود، حکم (پ) دیگر برقرار نمی‌گشت. زیرا فرض کنیم E مجموعهٔ تمام اعداد صحیح باشد. در این صورت، هر تابع تعریف شده بر E بر آن‌به‌طوریکنواخت پیوسته‌است. برای اثبات این مطلب فقط کافی است درتعریف ۱۸۰۴، δ را از یک کوچکتر بگیریم.

این بخش را بانشان دادن اینکه در قضیهٔ ۱۷۰۴ نیز فشردگی لازم است به پایان می‌بریم.

۲۱۰۴ مثال. فرض کنیم X بازهٔ نیمباز $[0, 2\pi)$ برخط حقیقی بوده، $\mathbf{f}$ نگاشتی از X بروی دایرهٔ Y، که‌مرکب از تمام نقاطی است که فاصله شان تا مبداء یک است، باشد که این طور داده شده است:

$$\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t) \qquad (0 \le t < 2\pi). \tag{24}$$

پیوستگی توابع مثلثاتی کسینوس‌و سینوس‌و نیزخواص‌تناوبی آنها در فصل ۸ ثابت‌می شوند. این نتایج نشان می‌دهندکه $\mathbf{f}$ یک نگاشت 1-1 پیوسته از X بروی Y است.

بااینحال، نگاشت معکوس (که به دلیل یک به یک و برو بودن $\mathbf{f}$ وجود دارد) در نقطهٔ $(1, 0) = \mathbf{f}(0)$ پیوسته‌نیست. البته، X در این‌مثال فشرده‌نمی‌باشد. (دیدن اینکه $\mathbf{f}^{-1}$ با وجود فشرده بودن Y پیوسته نیست ممکن است جالب باشد!)

پیوستگی وهمبندی

۲۲۰۴ قضیه. هرگاه f یک نگاشت پیوسته از فضای متری X بتوی فضای متری Y، و E زیرمجموعهٔ همبندی از X باشد، آنگاه $f(E)$ نیز همبند است.

برهان. فرض‌کنیم عکس این‌بوده $f(E) = A \cup B$ که در آن A و B زیر مجموعه‌های ناتهی و ازهم جدا شده‌ای از Y می‌باشند. قرار می‌دهیم $G = E \cap f^{-1}(A)$، $H = E \cap f^{-1}(B)$.

پس $E = G \cup H$ و نه G تهی است و نه H.

چون $A \subset \bar{A}$ ($\bar{A}$ بست A است) ، داریم $G \subset f^{-1}(\bar{A})$. مجموعهٔ دوم بخاطر پیوسته بودن f بسته است . بنابراین ، $\bar{G} \subset f^{-1}(\bar{A})$. از این نتیجه می‌شود که $f(\bar{G}) \subset \bar{A}$. چون $f(H) \subset B$ و $\bar{A} \cap B$ تهی است ، نتیجه می‌گیریم که $\bar{G} \cap H$ تهی می‌باشد .

همین استدلال نشان می‌دهد که $G \cap \bar{H}$ تهی است . لذا ، G و H از هم جدا شده می‌باشند . این در صورتی که E همبند باشد ممکن نیست .

۲۳۰۴ قضیه . فرض کنیم f یک تابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ $[a, b]$ باشد . هرگاه $f(a) < f(b)$ و c عددی باشد که $f(a) < c < f(b)$ ، آنگاه نقطه‌ای مانند $x \in (a, b)$ هست بطوری که $f(x) = c$.

البته ، در صورتی که $f(a) > f(b)$ ، نتیجهٔ مشابهی برقرار خواهد بود . به بیان نادقیق ، قضیه این را می‌گوید که هر تابع حقیقی پیوسته بر یک بازه تمام مقادیر میانی را می‌گیرد .

برهان . $[a, b]$ ، بر طبق قضیهٔ ۴۷۰۲ ، همبند است . پس قضیهٔ ۲۲۰۴ نشان می‌دهد که $f([a, b])$ زیرمجموعهٔ همبندی از R^1 است ، و حکم با توسل مجدد به قضیهٔ ۴۷۰۲ ثابت می‌شود .

۲۴۰۴ تبصره . در نظر اول ممکن است این طور دیده شود که قضیهٔ ۲۳۰۴ عکس دارد . یعنی ، شخص ممکن است این تصور را بکند که هرگاه به ازای هر دو نقطهٔ $x_1 < x_2$ و هر عدد حقیقی c بین $f(x_1)$ و $f(x_2)$ نقطه‌ای مانند x در (x_1, x_2) باشد که $f(x) = c$، آنگاه f باید پیوسته باشد .

اینکه این مطلب درست نیست را می‌شود از مثال ۲۷۰۴ (ت) نتیجه گرفت .

ناپیوستگیها

هرگاه تابع f در نقطهٔ x از قلمرو تعریف خود پیوسته نباشد ، می‌گوییم f در x **ناپیوسته** است ، یا اینکه f در x **ناپیوستگی** دارد . در صورت تعریف شدن f بر یک بازه یا یک قطعه ، رسم این است که ناپیوستگیها را به دونوع تقسیم می‌کنند . پیش از ذکر این رده‌بندی باید **حدود سمت راست و سمت چپ** f در x را ، که بترتیب با $f(x+)$ و

$f(x-)$ نشان می‌دهیم، تعریف کنیم.

۲۵.۴ تعریف. فرض‌کنیم f بر (a, b) تعریف شده باشد. نقطهٔ دلخواه x را قسمی می‌گیریم که $a \leq x < b$ می‌نویسیم

$$f(x+) = q$$

در صورتی که به‌ازای تمام دنباله‌های $\{t_n\}$ در (x, b) که $t_n \to x$، وقتی $n \to \infty$، $f(t_n) \to q$. برای رسیدن به تعریف $f(x-)$ به‌ازای $a < x \leq b$ خود را به دنباله‌های $\{t_n\}$ در (a, x) محدود می‌نماییم.

واضح است که $\lim_{t \to x} f(t)$ در هر نقطهٔ x از (a, b) وجود دارد اگر و فقط اگر

$$f(x+) = f(x-) = \lim_{t \to x} f(t)\cdot$$

۲۶.۴ تعریف. فرض‌کنیم f بر (a, b) تعریف شده باشد. هرگاه f در x ناپیوسته و $f(x+)$ و $f(x-)$ موجود باشند، آنگاه می‌گویند f در x ناپیوستگی **از نوع اول**، یا ناپیوستگی **ساده**، دارد. در غیر این صورت، ناپیوستگی **از نوع دوم** خوانده می‌شود.

یک تابع در دو صورت می‌تواند ناپیوستگی ساده داشته باشد: یا $f(x+) \neq f(x-)$ [که در این حالت مقدار $f(x)$ مهم نیست]، یا اینکه $f(x+) = f(x-) \neq f(x)\cdot$

۲۷.۴ چند مثال

(آ) تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ گویا})، \\ 0 & (x \text{ گنگ}). \end{cases}$$

در این صورت، f در هر نقطهٔ x ناپیوستگی از نوع دوم دارد، زیرا نه $f(x+)$ موجود است و نه $f(x-)\cdot$

(ب) تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ گویا})، \\ 0 & (x \text{ گنگ}). \end{cases}$$

در این صورت، f در $x=0$ پیوسته است، و در هر نقطهٔ دیگر ناپیوستگی از نوع دوم دارد.

(پ) تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (-3 < x < -2), \\ -x-2 & (-2 \le x < 0), \\ x+2 & (0 \le x < 1). \end{cases}$$

در این صورت، f در $x = 0$ ناپیوستگی ساده دارد، و در هر نقطهٔ دیگر $(-3, 1)$ پیوسته است.

(ت) تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

چون نه $f(0+)$ وجود دارد و نه $f(0-)$، پس f در $x=0$ ناپیوستگی از نوع دوم دارد. تابحال نشان نداده‌ایم که $\sin x$ یک تابع پیوسته است. اگر این نتیجه را یک آن بپذیریم، قضیهٔ ۷۰۴ پیوسته بودن f را در هر نقطهٔ $x \neq 0$ ایجاب خواهد کرد.

توابع یکنوا

حال آن توابعی را بررسی می‌کنیم که بر یک قطعهٔ مفروض هرگز نزول (ویا صعود) نمی‌کنند.

۲۸۰۴ تعریف. فرض کنیم f بر (a, b) حقیقی باشد. در این صورت، گوییم f بر (a, b) **صعودی** است هرگاه $a < x < y < b$ نامساوی $f(x) \le f(y)$ راایجاب کند. چنانچه جهت آخرین نامساوی عوض شود، تعریف **نزولی** بودن یک تابع را خواهیم داشت. ردهٔ توابع یکنوا از تابعهای صعودی و تابعهای نزولی تشکیل شده است.

۲۹۰۴ قضیه. فرض‌کنیم f بر (a, b) صعودی‌باشد. دراین صورت، $f(x+)$ و $f(x-)$ در هر نقطهٔ x از (a, b) وجود دارند. به عبارت دقیقتر،

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x-) \le f(x) \le f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t). \tag{25}$$

بعلاوه، هرگاه $a < x < y < b$ آنگاه

$$f(x+) \le f(y-). \tag{26}$$

واضح است که برای توابع نزولی نتایج مشابهی برقرارند .

برهان . بنا به فرض، مجموعهٔ $f(t)$ ها ، که در آنها $a < t < x$، از بالا به $f(x)$ کراندار است، و لذا ، کوچکترین کران بالایی داردکه ما آن را با A نشان می‌دهیم . واضح است که $A \le f(x)$. باید ثابت کنیم $A = f(x-)$.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد .ازتعریف A به عنوان کوچکترین کران بالایی معلوم می‌شود که عددی مانند $\delta > 0$ هست بقسمی که $a < x - \delta < x$ و

$$A - \varepsilon < f(x - \delta) \le A. \tag{27}$$

چون f یکنواست ، داریم

$$f(x - \delta) \le f(t) \le A \qquad (x - \delta < t < x). \tag{28}$$

چنانچه (۲۷) و (۲۸) را با هم تلفیق کنیم ، خواهیم دید که

$$|f(t) - A| < \varepsilon \qquad (x - \delta < t < x).$$

پس $f(x-) = A$.

قسمت دوم (۲۵) درست به همین نحو ثابت می‌شود .

اینک ، اگر $a < x < y < b$، از (۲۵) می‌بینیم که

$$f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t). \tag{29}$$

تساوی آخر از اعمال (۲۵) در مورد (a, y) به جای (a, b) به دست آمده است . بهمین نحو ،

$$f(y-) = \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t). \tag{30}$$

مقایسهٔ (۲۹) با (۳۰) نامساوی (۲۶) را خواهد داد .

نتیجه . *توابع یکنوا ناپیوستگی از نوع دوم ندارند .*

این نتیجه ایجاب می‌کند که هر تابع یکنوا حداکثر در تعدادی شمارشپذیر نقطه ناپیوسته است . به جای توسل به قضیهٔ کلی که اثباتش مختصراً" در تمرین ۱۷ آمده ، ما در اینجا برهان ساده‌ای را می‌آوریم که در مورد توابع یکنوا قابل اجراست .

۴۰۳۰ قضیه . *فرض کنیم f بر (a, b) یکنوا باشد . در این صورت ، مجموعهٔ نقاطی از*

(a, b) که در آنها f ناپیوسته است حداکثر شمارشپذیر می‌باشد.

برهان. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم f صعودی باشد، و E را مجموعهٔ نقاطی می‌انگاریم که f در آنها ناپیوسته است.

به هر x از E عدد گویای $r(x)$ را طوری مربوط می‌کنیم که

$$f(x-) < r(x) < f(x+) \cdot$$

چون $x_1 < x_2$ نامساوی $f(x_1+) \leq f(x_2-)$ را ایجاب می‌کند، ملاحظه می‌کنیم که اگر $x_1 \neq x_2$، $r(x_1) \neq r(x_2)$.

پس بین مجموعهٔ E و زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ اعداد گویا تناظر 1-1 ی برقرار کرده‌ایم. مجموعهٔ دوم، همانطور که می‌دانیم، شمارشپذیر است.

۳۱۰۴ تبصره. باید توجه داشت که ناپیوستگیهای یک تابع یکنوا لزوما" تنها نیستند. در واقع، به‌ازای هر زیر مجموعهٔ شمارشپذیر E از (a, b)، که حتی ممکن است چگال باشد، می‌توان تابع f را طوری ساخت که بر (a, b) یکنوا و بر آن فقط در نقاط E ناپیوسته باشد.

برای اثبات این مطلب، فرض می‌کنیم نقاط E را به صورت دنبالهٔ $\{x_n\}$، $n = 1, 2, 3, \ldots$، آراسته باشیم. $\{c_n\}$ را دنباله‌ای از اعداد مثبت می‌گیریم بطوری که Σc_n همگرا باشد. تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \sum_{x_n < x} c_n \qquad (a < x < b). \tag{31}$$

جمعبندی به صورت زیر فرض شده است: مجموع روی آن اندیسهای n گرفته می‌شود که برای آنها $x_n < x$. اگر هیچ x_n ی سمت چپ x نباشد، مجموع تهی است. از آنچه رسم است پیروی کرده آن را صفر تعریف می‌کنیم. چون (۳۱) به طور مطلق همگراست، ترتیبی که با آن جملات آراسته می‌شوند اهمیتی نخواهد داشت.

تحقیق خواص زیر در مورد f را به خواننده وا می‌گذاریم:

(آ) f بر (a, b) صعودی است؛

(ب) f در هر نقطهٔ E ناپیوسته است؛ درواقع،

$$f(x_n+) - f(x_n-) = c_n ;$$

(پ) f در هر نقطهٔ دیگر (a, b) پیوسته می‌باشد

بعلاوه، اثبات اینکه در تمام نقاط (a, b) ، $f(x-)=f(x)$ کار مشکلی نخواهد بود. هرگاه تابعی در این شرط صدق کند، می‌گوییم f **از چپ پیوسته** است. چنانچه در (۳۱) جمعبندی روی تمام اندیسهای n ی گرفته می‌شد که به‌ازای آنها $x_n \leq x$ ، ما در هر نقطهٔ (a, b) می‌داشتیم $f(x+)=f(x)$ ؛ یعنی، f **از راست پیوسته** می‌بود.

توابع از این نوع را می‌توان با روشی دیگر نیز تعریف کرد؛ برای دیدن نمونه، شما را به قضیهٔ ۱۶۰۶ ارجاع می‌دهیم.

حدود نامتناهی وحدود در بی‌نهایت

حال برای آنکه بتوان در دستگاه وسعت یافتهٔ اعداد حقیقی کار کرد، دامنهٔ تعریف ۱۰۴ را، با تنظیم مجددش برحسب همسایگیها، وسعت می‌بخشیم.

قبلاً، به‌ازای هر عدد حقیقی x ، هر قطعهٔ $(x-\delta, x+\delta)$ را یک همسایگی x تعریف کرده‌ایم.

۳۲۰۴ تعریف. به‌ازای هر c ی حقیقی، مجموعهٔ اعداد حقیقی x که $x>c$ یک همسایگی $+\infty$ نام دارد و به صورت $(c, +\infty)$ نوشته می‌شود. بهمین نحو، مجموعهٔ $(-\infty, c)$ یک همسایگی $-\infty$ می‌باشد.

۳۳۰۴ تعریف. فرض کنیم f یک تابع حقیقی باشد که بر E تعریف شده است. گوییم

$$f(t) \to A \text{ ، } t \to x \text{ وقتی}$$

(که در آن A و x در دستگاه وسعت یافتهٔ اعداد حقیقی‌اند) هرگاه به‌ازای هر همسایگی U از A همسایگی V از x باشد بطوری که $V \cap E$ تهی نبوده و به‌ازای هر $t \in V \cap E$ که $t \neq x$ ، $f(t) \in U$.

لحظه‌ای تأمل معلوم می‌سازد که این در حالتی که A و x حقیقی هستند با تعریف ۱۰۴ یکی است.

مشابه قضیهٔ ۴۰۴ هنوز هم درست است، و برهان آن چیز تازه‌ای به دست نمی‌دهد. ما آن را برای تکمیل بحث بیان می‌داریم.

۳۴۰۴ قضیه. فرض کنیم f و g بر E تعریف شده باشند. همچنین،

وقتی $t \to x$ ، $f(t) \to A$ و $g(t) \to B$ ·

در این صورت ،

(آ) $f(t) \to A'$ ایجاب می‌کند که $A' = A$ ؛

(ب) $(f+g)(t) \to A+B$ ؛

(پ) $(fg)(t) \to AB$ ؛

(ت) $(f/g)(t) \to A/B$ ؛

مشروط براینکه طرفهای راست (ب)، (پ)، و (ت) تعریف شده باشند .

توجه دارید که $\infty - \infty$، $0 \cdot \infty$، ∞/∞، و $A/0$ تعریف نشده‌اند (ر.ک. تعریف ۱۰۳۲) .

تمرین

۱ . فرض‌کنید f یک‌تابع حقیقی تعریف شده بر R^1 باشد که در

$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x-h)] = 0$$

به ازای هر $x \in R^1$ صدق می‌کند . آیا این پیوسته بودن f را ایجاب خواهد کرد ؟

۲ . هرگاه f نگاشت پیوسته‌ای از فضای متری X بتوی فضای متری Y باشد ، ثابت کنید به ازای هر مجموعهٔ $E \subset X$ ،

$$f(\bar{E}) \subset \overline{f(E)} \cdot$$

($\bar{E}$ بستار E را نشان می‌دهد .) با یک‌مثال‌نشان دهیدکه $f(\bar{E})$ می‌تواند یک زیر-مجموعهٔ حقیقی $\overline{f(E)}$ باشد .

۳ . فرض کنید f یک تابع حقیقی پیوسته بر فضای متری X باشد . $Z(f)$ (مجموعهٔ صفر f) را مجموعهٔ تمام p هایی در X بگیرید که در آنها $f(p) = 0$. ثابت‌کنید $Z(f)$ بسته است .

۴ . فرض کنید f و g نگاشتهای پیوسته‌ای از فضای متری X بتوی فضای متری Y ، و E یک زیر مجموعهٔ چگال X باشد . ثابت‌کنید $f(E)$ در $f(X)$ چگال است . هرگاه به‌ازای‌هر $p \in E$ ، $g(p) = f(p)$ ، ثابت‌کنید به‌ازای‌هر $p \in X$ ، $g(p) = f(p)$ ·
(به عبارت دیگر ، یک نگاشت پیوسته با مقادیرش بر زیر مجموعهٔ چگالی از قلمرو خود مشخص می شود .)

۵ . هرگاه f یک تابع حقیقی پیوسته باشد که بر مجموعهٔ بستهٔ $E \subset R^1$ تعریف شده است ،

ثابت کنید تابعی حقیقی و پیوسته بر R^1 چون g هست بطوری که به‌ازای‌هر $x \in E$ ، $g(x) = f(x)$. (این g ها را **توسیعهای پیوستهٔ** f از E به R^1 می‌نامند.) نشان دهید که نتیجهٔ فوق با حذف کلمهٔ "بسته" درست نیست. این نتیجه را به توابع برداری تعمیم دهید. ***راهنمایی*** :فرض کنید نمودار g برهریک‌ازقطعه‌هایی‌که متمم E را می‌سازند خطی مستقیم است (قس. تمرین ۲۹ در فصل ۲). هرگاه به جای R^1 یک فضای متری بگذاریم، نتیجهٔ مورد نظر بازهم برقرار است، لکن اثباتش چندان ساده نخواهد بود.

۶ . هرگاه f بر E تعریف شده باشد، ***نمودار*** f مجموعهٔ نقاطی چون $(x, f(x))$ است که $x \in E$ بخصوص، اگر E مجموعهٔ اعداد حقیقی و f یک تابع حقیقی باشد، نمودار f زیرمجموعه‌ای از صفحه خواهد بود.

فرض‌کنید E فشرده باشد، و ثابت‌کنید f بر E پیوسته است اگر و فقط اگر نمودارش فشرده باشد.

۷ . هرگاه $E \subset X$ و f تابعی تعریف شده بر X باشد، **تحدید** f به E تابعی است چون g که قلمروتعریفش E بوده‌و، به‌ازای‌هر $p \in E$، $g(p) = f(p)$. f و g را بر R^2 این‌طور تعریف‌کنید : $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ ؛ اگر $(x, y) \neq (0, 0)$، $f(x, y) = xy^2/(x^2 + y^4)$ و $g(x, y) = xy^2/(x^2 + y^6)$. ثابت‌کنید f بر R^2 کراندار است، g درهرهمسایگی $(0, 0)$ بی‌کران‌است، و f در $(0, 0)$ پیوسته نیست؛ معهذا، تحدیدهای‌هم f و هم g به هر خط مستقیم در R^2 پیوسته می‌باشند!

۸ . فرض‌کنید تابع حقیقی f بر مجموعهٔ‌کراندار E در R^1 به‌طوریکنواخت پیوسته باشد. ثابت کنید f بر E کراندار است.

نشان دهید که اگر کراندار بودن E از مفروضات حذف شود، نتیجهٔ فوق درست نخواهد بود.

۹ . نشان دهید که تعریف پیوستگی یکنواخت را می‌توان بر حسب اقطار مجموعه‌ها این طور بیان کرد : به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، δ ی مثبتی باشد بطوری که به‌ازای هر $E \subset X$ که $\operatorname{diam} E < \delta$ ، $\operatorname{diam} f(E) < \varepsilon$.

۱۰ . جزئیات مربوط‌به‌گفتهٔ زیررا، که برهان دیگری از قضیهٔ ۱۹۰۴ است، کامل نمایید : هرگاه f به‌طوریکنواخت‌پیوسته نباشد، آنگاه، به‌ازای ε مثبتی، دنباله‌های $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ در X هستند بطوری که $d_X(p_n, q_n) \to 0$ ولی $d_Y(f(p_n), f(q_n)) > \varepsilon$. با استفاده از قضیهٔ ۳۷۰۲ تناقضی به دست آورید.

۱۱ . فرض کنید f نگاشتی باشد به طور یکنواخت پیوسته از فضای متری X بتوی فضای

متری Y، و ثابت کنید به‌ازای‌هر دنباله‌ٔ کشی $\{x_n\}$ در X، $\{f(x_n)\}$ یک دنباله‌ٔ کشی در Y است. با استفاده از این نتیجه، برهان دیگری برای قضیه‌ٔ مذکور در تمرین ۱۳ ارائه دهید.

۱۲ . هر تابع به طور یکنواخت پیوسته از یک تابع به طور یکنواخت پیوسته خود یک تابع به طور یکنواخت پیوسته است.

این مطلب را دقیقتر بیان کرده آن را اثبات نمایید.

۱۳ . فرض کنید E یک زیرمجموعه‌ٔ چگال فضای متری X، و f یک تابع حقیقی و به‌طوریکنواخت پیوسته باشد که بر E تعریف شده است. ثابت کنید f توسیع پیوسته‌ای از E به X دارد (برای اصطلاح مربوطه، ر.ک. تمرین ۵). (یکتایی توسیع از تمرین ۴ نتیجه می‌شود.) ***راهنمایی***: به‌ازای‌هر $p \in X$ و هر عدد صحیح و مثبت n، فرض کنید $V_n(p)$ مجموعه‌ٔ تمام q هایی در E باشد که $d(p,q) < 1/n$. با استفاده از تمرین ۹ نشان‌دهید که‌اشتراک بستهای مجموعه‌های $f(V_1(p))$ ، $f(V_2(p))$ ، ... از یک‌نقطه‌در R^1، مثلاً" $g(p)$ ، تشکیل شده است. ثابت کنید تابع g که بر X این طور تعریف شود همان توسیع مطلوب f است.

آیا می‌شد فضای برد، یعنی R^1، را با R^k، با هرفضای‌متری‌فشرده، با هر فضای متری تام، و یا با هر فضای متری عوض کرد؟

۱۴ . فرض کنید $I = [0, 1]$ بازه‌ٔ یکهٔ بسته باشد. f را یک نگاشت پیوسته‌از I بتوی I بیگارید. ثابت کنید به‌ازای دست‌کم یک $x \in I$، $f(x) = x$.

۱۵ . نگاشت f از X بتوی Y را ***باز*** خوانند هرگاه به‌ازای هرمجموعه‌ٔ باز V در X، $f(V)$ مجموعه‌ٔ بازی در Y باشد.

ثابت کنید هر نگاشت باز پیوسته از R^1 بتوی R^1 یکنوا است.

۱۶ . فرض‌کنید $[x]$ بزرگترین‌عدد صحیح موجود در x باشد، یعنی، $[x]$ عدد صحیحی باشد که $x-1 < [x] \leq x$ ؛ و $(x) = x - [x]$ را جزء کسری x فرض کنید. ناپیوستگیهای توابع $[x]$ و (x) چه هستند؟

۱۷ . فرض کنید f یک تابع حقیقی باشد که بر (a, b) تعریف شده‌است. ثابت کنید مجموعه‌ٔ نقاطی که در آنها f ناپیوستگی ساده دارد حداکثر شمارشپذیر است. ***راهنمایی***: فرض کنید E مجموعه‌ای باشد که بر آن $f(x-) < f(x+)$. به‌هرنقطه‌ٔ x از E سه‌تایی (p, q, r) از اعداد گویا را چنان مربوط کنید که

(آ) $f(x-) < p < f(x+)$؛

(ب) $a < q < t < x$ رابطهٔ $f(t) < p$ را ایجاب کند؛

(پ) $x < t < r < b$ رابطهٔ $f(t) > p$ را ایجاب نماید.

مجموعهٔ تمام این سه تاییها شمارشپذیر است. نشان دهید که هر سه تایی به حداکثر یک نقطه از E مربوط است. همین روش را برای ناپیوستگیهای سادهٔ نوع دیگر به کار برید.

۱ . هر عدد گویای x را می‌توان به شکل $x = m/n$ نوشت که در آن $n > 0$، m و n اعداد صحیحی بدون مقسوم علیه مشترک باشند. وقتی $x = 0$، n را مساوی 1 بگیرید. تابع f را، که بر R^1 با روابط زیر تعریف شده، در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (\text{گنگ } x), \\ \dfrac{1}{n} & \left(x = \dfrac{m}{n}\right). \end{cases}$$

ثابت کنید f در هر نقطهٔ گنگ پیوسته است، و در هر نقطهٔ گویا ناپیوستگی ساده دارد.

۱ . فرض کنید f یک تابع حقیقی با قلمرو R^1 باشد که خاصیت مقدار میانی دارد: هرگاه $f(a) < c < f(b)$، آنگاه به‌ازای x ی بین a و b، $f(x) = c$. همچنین، فرض کنید به‌ازای هر r گویا، مجموعهٔ تمام x هایی که $f(x) = r$ بسته باشد. ثابت کنید f پیوسته است. **راهنمایی**: هرگاه $x_n \to x_0$ اما به‌ازای r ی و هر n، $f(x_n) > r > f(x_0)$، آنگاه t_n ی بین x_0 و x_n هست که $f(t_n) = r$. پس $t_n \to x_0$. حال تناقض به دست آورید.[1]

۲۰ . هرگاه E زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای متری X باشد، فاصلهٔ $x \in X$ تا E را با رابطهٔ

$$\rho_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z)$$

تعریف کنید.

(آ) ثابت کنید $\rho_E(x) = 0$ اگر و فقط اگر $x \in \bar{E}$.

(ب) با نشان دادن اینکه به‌ازای هر $x, y \in X$،

$$|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \le d(x, y),$$

ثابت کنید ρ_E بر X به طور یکنواخت پیوسته است.

1. N. J. Fine, *Amer. Math. Monthly*, vol. 73, 1966, p. 782.

راهنمایی : $\rho_E(x) \le d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$. درنتیجه ،

$$\rho_E(x) \le d(x, y) + \rho_E(y)$$

۲۱ . فرض کنید K و F مجموعه‌هایی ازهم جدا در فضای متری X ، و K فشرده و F بسته باشد . ثابت‌کنید δ ی مثبتی هست بطوری‌که اگر $p \in K$ و $q \in F$ ، $d(p,q) > \delta$.
راهنمایی : ρ_F تابع مثبت پیوسته‌ای بر K است .
نشان دهید که نتیجهٔ فوق ممکن است برای دو مجموعهٔ بستهٔ ازهم جدا که هیچیک فشرده نیست برقرار نباشد .

۲۲ . فرض کنید A و B مجموعه‌هایی بسته و ناتهی و ازهم جدا در فضای متری X باشند ، و تعریف کنید

$$f(p) = \frac{\rho_A(p)}{\rho_A(p) + \rho_B(p)} \quad (p \in X).$$

نشان‌دهید که f بر X تابع پیوسته‌ای‌است که بردش در $[0, 1]$ قرار دارد ؛همچنین ، فقط بر A ، $f(p) = 0$ و ، فقط بر B ، $f(p) = 1$.این‌مطلب عکس تمرین ۳ را به ما می‌دهد : هر مجموعهٔ بستهٔ $A \subset X$ به ازای تابع حقیقی و پیوسته‌ای مانند f بر X ، مساوی $Z(f)$ است . با فرض $V = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$، $W = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ نشان دهیدکه V و W باز و ازهم جداهستند، و $A \subset V, B \subset W$. (لذا ، هر جفت مجموعهٔ بستهٔ ازهم جدا در یک فضای متری را می‌توان با جفتی از مجموعه های باز ازهم‌ـ جدا پوشانید . این خاصیت فضاهای متری را خاصیت **نرمالی** می‌نامند .)

۲۳ . تابع حقیقی f تعریف شده در (a, b) را **محدب** خوانند هرگاه‌وقتی $a < x < b$، $a < y < b$، و $0 < \lambda < 1$، داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) .$$

ثابت کنید هر تابع محدب پیوسته است . ثابت کنید هر تابع محدب صعودی از یک تابع محدب یک تابع محدب است . (به عنوان مثال ، اگر f محدب باشد ، e^f نیز چنین است .)

هرگاه f در (a, b) محدب باشد و $a < s < t < u < b$ ، نشان دهید که

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \le \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \le \frac{f(u) - f(t)}{u - t} .$$

۲۴ . فرض‌کنید f یک تابع حقیقی پیوسته باشد که در (a, b) تعریف شده است بطوری که به‌ازای هر $x, y \in (a, b)$ ،

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} .$$

ثابت کنید f محدب است .

۲۵ . هرگاه $A \subset R^k$ و $B \subset R^k$، $A+B$ را مجموعهٔ تمام مجموعهای $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ که $\mathbf{x} \in A$ و $\mathbf{y} \in B$ تعریف کنید .

(آ) هرگاه در R^k مجموعهٔ K فشرده و C بسته باشد ، ثابت کنید $K+C$ بسته است . **راهنمایی :** فرض کنید $\mathbf{z} \notin K+C$. قرار دهید $F=\mathbf{z}-C$ ؛ یعنی ، مجموعهٔ تمام $\mathbf{z}-\mathbf{y}$ هایی که $\mathbf{y} \in C$. در این صورت ، K و F ازهم جدا هستند . δ را مثل تمرین ۲۱ اختیار کنید . نشان دهید که گوی باز به مرکز $\mathbf{z}$ و شعاع δ مجموعهٔ $K+C$ را قطع نمی‌کند .

(ب) فرض کنید α عدد گنگی باشد . همچنین ، C_1 مجموعهٔ تمام اعداد صحیح ، و C_2 مجموعهٔ همهٔ $n\alpha$ هایی باشد که $n \in C_1$. با نشان دادن اینکه C_1+C_2 یک زیر-مجموعهٔ چگال و شمارشپذیر R^1 است ، ثابت کنید C_1 و C_2 زیرمجموعه های بستهٔ R^1 اند در حالی که مجموع C_1+C_2 بسته نیست .

۲۶ . فرض کنید X ، Y ، و Z فضاهایی متری باشند و Y فشرده باشد . f را نگاشتی بینگارید که X را بتوی Y می‌نگارد ، g را نگاشت یک به یک پیوسته‌ای از Y بتوی Z بگیرید ، و به ازای هر $x \in X$ قرار دهید $h(x)=g(f(x))$.

ثابت کنید که اگر h به طور یکنواخت، پیوسته باشد ، f نیز چنین است . **راهنمایی :** g^{-1} دارای قلمرو فشردهٔ $g(Y)$ است ، و $f(x)=g^{-1}(h(x))$.

همچنین ، ثابت کنید که اگر h پیوسته باشد ، f نیز چنین خواهد بود .

(با اصلاح مثال ۴ ۰ ۲۱ و یا با مثالی دیگر) نشان دهید که حتی وقتی X و Z هم فشرده باشند ، فشردگی Y را نمی‌شود از مفروضات حذف کرد .

۵
مشتقگیری

در این فصل (جز در بخش آخر) نظر خود را معطوف توابع **حقیقی** می‌کنیم که بر بازه‌ها و یا قطعه‌هایی تعریف شده‌اند. این کار صرفاً " برای راحتی صورت نمی‌گیرد، چرا که تفاوتهای ذاتی وقتی ظاهر شوند که ما از توابع حقیقی به تابعهای برداری برویم. مشتقگیری از تابعهایی که بر R^k تعریف شده‌اند در فصل ۹ مطرح خواهد شد.

مشتق یك تابع حقیقی

۱۰۵ تعریف. فرض کنیم f بر $[a, b]$ تعریف شده باشد (و حقیقی باشد). به‌ازای هر $x \in [a, b]$

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad (a < t < b,\ t \neq x) \tag{1}$$

را تشکیل داده، تعریف می‌کنیم

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t), \tag{2}$$

مشروط بر آنکه این حد طبق تعریف ۱۰۴ وجود داشته باشد.

پس به تابع f تابع f' مربوط می‌شود که قلمروش مجموعهٔ x هایی است که در آنها حد (۲) وجود دارد. f' را **مشتق** f نام نهاده‌اند.

هرگاه f' در نقطهٔ x تعریف شده باشد، می‌گوییم f در x **مشتقپذیر** است. چنانچه f' در هر نقطه از مجموعهٔ $E \subset [a, b]$ تعریف شده باشد، گوییم f بر E مشتقپذیر می‌باشد.

در (۲) می‌توان حدود سمت راست و سمت چپ را در نظر گرفت. این امر به تعریف مشتقهای سمت راست و سمت چپ منجر می‌شود. بخصوص، در نقاط انتهایی a و b، مشتق،

در صورت وجود، بترتیب مشتق سمت راست یا سمت چپ می‌باشد. بهرحال، ما در جزئیات مشتقهای یکطرفه وارد نخواهیم شد.

هرگاه f بر قطعهٔ (a, b) تعریف شده و $a < x < b$، $f'(x)$، مثل بالا، به وسیلهٔ (۱) و (۲) تعریف می‌شود. لکن در این حالت $f'(a)$ و $f'(b)$ تعریف نشده‌اند.

۲۰۵ قضیه. فرض‌کنیم f بر $[a, b]$ تعریف شده باشد. هرگاه f در نقطهٔ $x \in [a, b]$ مشتقپذیر باشد، f در x پیوسته است.

برهان. وقتی $t \to x$، بنابر قضیهٔ ۴۰۴، داریم

$$f(t) - f(x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot (t - x) \to f'(x) \cdot 0 = 0.$$

عکس این قضیه درست نیست. به‌آسانی می‌توان توابع پیوسته‌ای ساخت که درنقاط تنها مشتقپذیر نباشند. حتی درفصل ۷ با تابعی آشنا می‌شویم که برتمام خط پیوسته است بی‌آنکه در نقطه‌ای مشتقپذیر باشد!

۳۰۵ قضیه. فرض‌کنیم f و g بر $[a, b]$ تعریف شده و در نقطهٔ $x \in [a, b]$ مشتقپذیر باشند. دراین صورت، $f + g$، fg، و f/g در x مشتقپذیرند، و

(آ) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$؛

(ب) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$؛

(پ) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$.

البته، در (پ)، فرض می‌کنیم $g(x) \neq 0$.

برهان. (آ)، بنابر قضیهٔ ۴۰۴، واضح است. قرار می‌دهیم $h = fg$. در این صورت،

$$h(t) - h(x) = f(t)[g(t) - g(x)] + g(x)[f(t) - f(x)].$$

اگر این رابطه را بر $t - x$ تقسیم کرده، توجه کنیم که وقتی $t \to x$، $f(t) \to f(x)$ (قضیهٔ ۲۰۵)، (ب) نتیجه خواهد شد. حال قرار می‌دهیم $h = f/g$. دراین صورت،

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = \frac{1}{g(t)g(x)}\left[g(x)\frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f(x)\frac{g(t) - g(x)}{t - x}\right].$$

چنانچه $t \to x$ ، و قضایای ۴۰۴ و ۲۰۵ را به‌کار بریم، (پ) به دستمان خواهد رسید.

۴۰۵ چند مثال. مشتق هر مقدار ثابت بوضوح صفر است. هرگاه f با $f(x) = x$ تعریف شده باشد، $f'(x) = 1$. پس با به‌کاربردن مکرر (ب) و (پ) معلوم می‌شود که x^n مشتقپذیر است و مشتق آن به‌ازای هر عدد صحیح n مساوی nx^{n-1} می‌باشد (اگر $n < 0$ ، بایدخود را به $x \neq 0$ مقید نماییم). لذا، هر چند جمله‌ای مشتقپذیر است، و همچنین، هر تابع گویا، جز در نقاطی که مخرجش صفر است، مشتقپذیر می‌باشد.

قضیهٔ زیر به "قاعدهٔ زنجیره‌ای" برای مشتقگیری معروف شده است. این قاعده به مشتقگیری از توابع مرکب می‌پردازد، و احتمالا" مهمترین قضیه در باب مشتقها است. ما صورتهای کلیتر آن را در فصل ۹ خواهیم دید.

۵۰۵ قضیه. فرض‌کنیم f بر $[a, b]$ پیوسته بوده، $f'(x)$ در نقطه‌ای چون $x \in [a, b]$ وجود داشته باشد، g بر بازهٔ I که شامل بـــرد f است تعریف شده باشد، و g در نقطهٔ $f(x)$ مشتقپذیر باشد. هرگاه

$$h(t) = g(f(t)) \qquad (a \leq t \leq b),$$

آنگاه h در x مشتقپذیر است، و

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x). \tag{3}$$

برهان. قرار می‌دهیم $y = f(x)$. بنا به تعریف مشتق داریم

$$f(t) - f(x) = (t - x)[f'(x) + u(t)], \tag{4}$$

$$g(s) - g(y) = (s - y)[g'(y) + v(s)], \tag{5}$$

که در آنهــا $t \in [a, b]$ ، $s \in I$ ، و وقتی $t \to x$ ، $u(t) \to 0$، و وقتی $s \to y$ ، $v(s) \to 0$. قرار می‌دهیم $s = f(t)$. اگر اول از (۵) و بعد از (۴) استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= g(f(t)) - g(f(x)) \\ &= [f(t) - f(x)] \cdot [g'(y) + v(s)] \\ &= (t - x) \cdot [f'(x) + u(t)] \cdot [g'(y) + v(s)], \end{aligned}$$

یا، اگر $t \neq x$ ،

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = [g'(y) + v(s)] \cdot [f'(x) + u(t)]. \tag{6}$$

با فرض $t \to x$ ، از پیوستگی f معلوم می‌شود که $y \to s$؛ درنتیجه، طرف راست (۶) به $g'(y)f'(x)$ میل می‌کند، که (۳) را به دست خواهد داد.

۶۰۵ چند مثال

(آ) فرض کنیم f به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases} \tag{7}$$

با این‌فرض‌که مشتق $\sin x$ مساوی $\cos x$ است (توابع مثلثاتی در فصل ۸ مطرح می‌شوند)، می‌توانیم قضایای ۳۰۵ و ۵۰۵ را به‌ازای $x \neq 0$ به کار برده نتیجه بگیریم که

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0). \tag{8}$$

این قضایا در $x = 0$ قابل اعمال نیستند، زیرا $1/x$ در آن تعریف نشده است، و در این مورد ما مستقیما" به تعریف متوسل می‌شویم: به‌ازای $t \neq 0$ داریم

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \sin \frac{1}{t}.$$

وقتی $t \to 0$ ، مقدار فوق به حدی نمی‌گراید؛ پس $f'(0)$ وجود نخواهد داشت.

(ب) فرض کنیم f به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases} \tag{9}$$

مثل بالا داریم

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0). \tag{10}$$

در $x = 0$ ، به تعریف متوسل شده به دست می‌آوریم که

$$\left| \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \right| = \left| t \sin \frac{1}{t} \right| \leq |t| \qquad (t \neq 0).$$

با فرض $t \to 0$ خواهیم دید که

$$f'(0) = 0. \tag{11}$$

پس f درتمام x ها مشتقپذیراست. اما f' تابع پیوسته‌ای نیست، زیرا وقتی $x \to 0$ ، $\cos (1/x)$ در (۱۰) به حدی میل نمی‌کند.

قضایای مقدارمیانگین

۷۰۵ تعریف. فرض کنیم f یک تابع حقیقی باشد که بر فضای متری X تعریف شده است.

می‌گوییم f در نقطهٔ $p \in X$ **ماکزیمم موضعی** دارد هرگاه δ ی مثبتی باشد بطوری که به‌ازای هر $q \in X$ که $d(p, q) < \delta$ داشته باشیم $f(q) \leq f(p)$.

مینیممهای موضعی به همین نحو تعریف می‌شوند .

قضیهٔ بعدی اساس بسیاری از کاربردهای مشتقگیری می‌باشد .

۸۰۵ قضیه . فرض کنیم f بر $[a, b]$ تعریف شده باشد . هرگاه f در نقطهٔ $x \in (a, b)$ ماکزیمم موضعی داشته و $f'(x)$ موجود باشد ، آنگاه $f'(x) = 0$.

البته ، برای مینیممهای موضعی نیز حکم مشابهی برقرار است .

برهان . δ را طبق تعریف ۷۰۵ اختیار می‌کنیم بطوری که

$$a < x - \delta < x < x + \delta < b.$$

هرگاه $x-\delta< t< x$، آنگاه

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

با فرض $t \to x$ مشاهده می‌کنیم که $f'(x) \geq 0$.

هرگاه $x < t < x + \delta$،آنگاه

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq 0,$$

که نشان می‌دهد که $f'(x) \leq 0$. پس $f'(x) = 0$.

۹۰۵ قضیه . هرگاه f و g توابع حقیقی و پیوسته‌ای بر $[a, b]$ باشند که در (a, b) مشتقپذیرند ، آنگاه نقطه‌ای مانند $x \in (a, b)$ هست که در آن

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x).$$

توجه کنید که در نقاط انتهایی مشتقپذیری لازم نیست .

برهان . قرار می‌دهیم

$$h(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t) \qquad (a \leq t \leq b).$$

در این صورت، h بر $[a, b]$ پیوسته است ، h در (a, b) مشتقپذیر است ، و

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b). \tag{12}$$

برای اثبات قضیه باید نشان داد که به‌ازای x ی در (a, b) ، $h'(x) = 0$.

گوییم اگر h ثابت باشد ، این رابطه برای هر $x \in (a, b)$ برقرار است . هرگاه به‌ازای t ای در (a, b) ، $h(t) > h(a)$ ، x را نقطه‌ای در $[a, b]$ می‌گیریم که در آن h به ماکزیمم خود می‌رسد (قضیهٔ ۱۶۰۴) . بنابر (۱۲)، $x \in (a, b)$ ، و قضیهٔ ۸۰۵ نشان می‌دهد که $h'(x) = 0$. چنانچه به‌ازای t ای در (a, b) ، $h(t) < h(a)$ ، در صورتی که برای x نقطه‌ای در $[a, b]$ اختیار شود که h در آن به مینیمم می‌رسد ، همان استدلال بالا اعتبار خواهد داشت .

این قضیه را اغلب **قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته** می‌خوانند ؛ حالت خاص زیر است که معمولاً "قضیهٔ مقدار میانگین" نام دارد .

۱۰۰۵ قضیه. هرگاه f یک تابع پیوستهٔ حقیقی بر $[a, b]$ باشد که در (a, b) مشتقپذیر است ، آنگاه نقطه‌ای مانند $x \in (a, b)$ هست که در آن

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x).$$

برهان. در قضیهٔ ۹۰۵ ، $g(x)$ را مساوی x اختیار کنید .

۱۱۰۵ قضیه. فرض کنیم f در (a, b) مشتقپذیر باشد .

(آ) هرگاه به‌ازای هر $x \in (a, b)$ ، $f'(x) \geq 0$ ، آنگاه f صعودی است .

(ب) هرگاه به‌ازای هر $x \in (a, b)$ ، $f'(x) = 0$ ، آنگاه f ثابت است .

(پ) هرگاه به‌ازای هر $x \in (a, b)$ ، $f'(x) \leq 0$ ، آنگاه f نزولی خواهد بود .

برهان. تمام احکام را می‌توان از معادلهٔ

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(x),$$

که به‌ازای هر جفت x_1 و x_2 در (a, b) و x ی بین x_1 و x_2 معتبر است ، به دست آورد .

پیوستگی مشتقها

قبلاً دیده‌ایم [مثال ۶۰۵ (ب)] که ممکن است f' در هر نقطه وجود داشته ولی در نقطه‌ای

ناپیوسته باشد . لکن این طورنیست که هر تابع مشتق تابعی باشد . بخصوص. مشتقهایی که درهر نقطه از یک بازه وجود دارند با توابع پیوسته بر یک بازه در یک خاصیت سهیمند : این مشتقها مقادیر میانی خود را می‌گیرند (قس. قضیهٔ ۲۳۰۴) . بیان دقیق مطلب در زیر آمده است .

۱۲۰۵ قضیه . فرض‌کنیم f یک تابع حقیقی مشتقپذیر بر $[a, b]$ باشد و $f'(a) < \lambda < f'(b)$، در این صورت ، نقطه‌ای مانند $x \in (a, b)$ هست که $f'(x) = \lambda$.

البته ، در صورتی که $f'(a) > f'(b)$، نتیجهٔ مشابهی برقرار است .

برهان . قرار می‌دهیم $g(t) = f(t) - \lambda t$. در این صورت، $g'(a) < 0$. پس به‌ازای t_1 ی در (a, b) ، $g(t_1) < g(a)$. و $g'(b) > 0$. پس به‌ازای t_2 ای در (a, b) ، $g(t_2) < g(b)$. ازاینرو، g در نقطه‌ای چون x که $a < x < b$ به‌مینیمم خودبر $[a, b]$ می‌رسد (قضیهٔ ۱۶۰۴) برطبق قضیهٔ ۸۰۵، $g'(x) = 0$. بنابراین، $f'(x) = \lambda$.

نتیجه . هرگاه f بر $[a, b]$ مشتقپذیر باشد ، آنگاه f' نمی‌تواند بر $[a, b]$ ناپیوستگی ساده داشته باشد .

اما f' ممکن است ناپیوستگیهایی از نوع دوم داشته باشد .

قاعدهٔ هوپیتال[1]

قضیهٔ زیر در محاسبهٔ حدود کرارا" مورد استفاده قرار می‌گیرد .

۱۳۰۵ قضیه . فرض‌کنیم f و g در (a, b) حقیقی و مشتقپذیر باشند و ، به‌ازای هر $x \in (a, b)$ ، $g'(x) \neq 0$ ، که $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. گیریم

$$\text{وقتی } x \to a \text{ ، } \frac{f'(x)}{g'(x)} \to A . \tag{13}$$

هرگاه

$$\text{وقتی } x \to a \text{ ، } g(x) \to 0 \text{ و } f(x) \to 0 \text{،} \tag{14}$$

---

1. L'Hospital

یا هرگاه

$$\text{وقتی} \quad x \to a \ ، \ g(x) \to +\infty \ ، \tag{15}$$

آنگاه

$$\text{وقتی} \quad x \to a \ ، \ \frac{f(x)}{g(x)} \to A \ . \tag{16}$$

البته، اگر $x \to b$ یا در (۱۵) $g(x) \to -\infty$ ، حکم مشابهی نیز برقرار خواهد بود. خاطرنشان کنیم که ما اینک مفهوم حد را به معنی وسیع تعریف ۴.۳۳ گرفته‌ایم.

برهان. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $-\infty \le A < +\infty$. عدد حقیقی q را قسمی اختیار می‌کنیم که $A < q$ ، و بعد r را طوری می‌گیریم که $A<r<q$. بنابر (۱۳)، نقطه‌ای مانند $c \in (a, b)$ هست که $a < x < c$ نامساوی

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r \tag{17}$$

را ایجاب می‌کند. هرگاه $a < x < y < c$ قضیهٔ ۵.۹ نشان می‌دهد که نقطه‌ای مانند $t \in (x, y)$ وجود دارد که

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r \ . \tag{18}$$

فرض کنیم (۱۴) برقرار باشد. با فرض $x \to a$ در (۱۸) می‌بینیم که

$$\frac{f(y)}{g(y)} \le r < q \qquad (a < y < c). \tag{19}$$

حال فرض می‌کنیم (۱۵) برقرار باشد. با ثابت گرفتن y در (۱۸)، می‌توان نقطه‌ای چون c_1 در (a, y) راطوری اختیار کرد که به ازای $a < x < c_1$، $g(x) > g(y)$ و $g(x) > 0$. با ضرب (۱۸) در $[g(x) - g(y)]/g(x)$ خواهیم داشت

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad (a < x < c_1). \tag{20}$$

اگر در (۲۰) $x \to a$، رابطهٔ (۱۵) نشان خواهد داد که نقطه‌ای مانند $c_2 \in (a, c_1)$ هست بقسمی که

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \qquad (a < x < c_2). \tag{21}$$

خلاصه آنکه، (۱۹) و (۲۱) معلوم می‌کنند که به ازای هر q ، فقط تابع شرط $A < q$، نقطه‌ای مانند c_2 هست که اگر $a < x < c_2$ ، $f(x)/g(x) < q$.

بهمین نحو، اگر $-\infty < A \le +\infty$ و p طوری اختیار شود که $p < A$، می‌توان نقطهٔ c_3 را چنان یافت که

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (a < x < c_3), \tag{22}$$

و (۱۶) از این دو مطلب نتیجه خواهد شد.

مشتقات مراتب بالاتر

۱۴۰۵ تعریف. هرگاه f بر بازه‌ای مشتق داشته و f' خود مشتقپذیر باشد، ما مشتق f' را با f'' نشان داده آن را مشتق دوم f می‌نامیم. با ادامهٔ این کار، تابعهای

$$f, f', f'', f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}$$

را خواهیم داشت که هر یک مشتق تابع پیش از خود است. $f^{(n)}$ **مشتق** n **م**، یا مشتق **مرتبهٔ** n ، f نامیده شده است.

برای آنکه $f^{(n)}(x)$ در x وجود داشته باشد باید $f^{(n-1)}(t)$ دریکی ازهمسایگیهای x (یا، اگر x یک نقطهٔ انتهایی بازه‌ای باشد که f بر آن تعریف شده، در یکی از همسایگیهای یکطرفهٔ x) وجود داشته و $f^{(n-1)}$ در x مشتقپذیر باشد. چون وجود $f^{(n-1)}$ در یکی ازهمسایگیهای x الزامی است، $f^{(n-2)}$ باید درآن‌همسایگی مشتقپذیر باشد.

قضیهٔ تیلور[1]

۱۵۰۵ قضیه. فرض‌کنیم f یک تابع حقیقی بر $[a, b]$ بوده، n عدد صحیح مثبتی باشد، $f^{(n-1)}$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد، و $f^{(n)}(t)$ به‌ازای‌هر $t \in (a, b)$ وجود داشته باشد. α و β را نقاط متمایزی از $[a\ b]$ انگاشته، تعریف می‌کنیم

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k. \tag{23}$$

در این صورت، نقطه‌ای مانند x بین α و β هست بطوری که

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n. \tag{24}$$

این‌قضیه‌به ازای $n = 1$ همان‌قضیهٔ مقدار میانگین است. قضیه، در حالت کلی، نشان می‌دهدکه f را می‌شودبا یک چند جمله‌ای درجهٔ $n-1$ تقریب کرد و، با دانستن کرانهای $|f^{(n)}(x)|$ ، می‌توان خطا را به وسیلهٔ (۲۴) تخمین زد.

برهان. فرض کنیم M عددی باشد که با

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta-\alpha)^n \tag{25}$$

1. Taylor

تعریف می‌شود، و قرار می‌دهیم

$$g(t)=f(t)-P(t)-M(t-\alpha)^n \qquad (a\le t\le b). \tag{26}$$

باید نشان دهیم که به ازای x ی بین α و β، $n!M=f^{(n)}(x)$. گوییم، بنابر (۲۳) و (۲۶)، داریم

$$g^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)-n!M \qquad (a<t<b). \tag{27}$$

پس اگر بشود نشان داد که به ازای x ی بین α و β، $g^{(n)}(x)=0$، برهان تمام خواهد بود.

گوییم چون به ازای $k=0,\ldots,n-1$، $P^{(k)}(\alpha)=f^{(k)}(\alpha)$، پس داریم

$$g(\alpha)=g'(\alpha)=\cdots=g^{(n-1)}(\alpha)=0. \tag{28}$$

انتخاب ما از M نشان می‌دهد که $g(\beta)=0$. پس، بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، به ازای x_1 ی بین α و β، $g'(x_1)=0$. چون $g'(\alpha)=0$، به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم که به ازای x_2 ای بین α و x_1، $g''(x_2)=0$. پس از n مرحله به این نتیجه می‌رسیم که به ازای x_n ی بین α و x_{n-1}، یعنی، بین α و β، داریم $g^{(n)}(x_n)=0$.

مشتقگیری از توابع برداری

۱۶۰۵ چند تبصره. تعریف ۱۰۵ برای توابع مختلط f که بر $[a,b]$ تعریف شده‌اند بدون ذره‌ای تغییر به کار می‌رود، و قضایای ۲۰۵ و ۳۰۵ با برهانهایشان معتبر می‌مانند. هرگاه f_1 و f_2 قسمتهای حقیقی و موهومی f باشند؛ یعنی، هرگاه به ازای $a\le t\le b$،

$$f(t)=f_1(t)+if_2(t)$$

که در آن $f_1(t)$ و $f_2(t)$ حقیقی‌اند، بوضوح خواهیم داشت

$$f'(x)=f_1'(x)+if_2'(x). \tag{29}$$

همچنین، f در x مشتقپذیر است اگر و فقط اگر هر دوی f_1 و f_2 در x مشتقپذیر باشند.

با طرح مطلب درحالت کلی برای توابع برداری، یعنی، توابعی چون $\mathbf{f}$ که $[a,b]$ را بتوی R^k ای می‌نگارد، هنوزهم می‌توان تعریف ۱۰۵ را به کار برد و $\mathbf{f}'(x)$ را تعریف‌کرد. در این‌حالت جملهٔ $\phi(t)$ در (۱)، به‌ازای‌هر t، نقطه‌ای‌است در R^k، و حد مذکور در (۲) بر حسب نرم R^k گرفته می‌شود. به عبارت دیگر، $\mathbf{f}'(x)$ (در صورت وجود) آن نقطه‌ای از R^k است که به ازای آن

$$\lim_{t\to x}\left|\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(x)}{t-x}-\mathbf{f}'(x)\right|=0, \tag{30}$$

و باز $\mathbf{f}'$ تابعی است که مقادیرش در R^k می‌باشند.

هرگاه f_1 ، . . . ، f_k مؤلفه‌های $\mathbf{f}$ باشند، که در قضیهٔ ۱۰۰۴ تعریف شدند، آنگاه

$$\mathbf{f}' = (f_1', \ldots, f_k'), \tag{31}$$

و $\mathbf{f}$ در نقطهٔ x مشتقپذیر است اگر و فقط اگر هر یک از توابع f_1 ، . . . ، f_k در x مشتقپذیر باشد.

در این وضع قضیهٔ ۲۰۵ نیز درست است، و اگر fg را با حاصل ضرب داخلی $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ (ر.ک. تعریف ۳۰۴) عوض کنیم، قسمتهای (آ) و (ب) قضیهٔ ۳۰۵ هم درست خواهند بود.

اما وقتی به قضیهٔ مقدار میانگین و به یکی از نتایج آن، یعنی، قاعدهٔ هوپیتال، رو می‌آوریم وضع فرق می‌کند. دو مثال بعدی نشان می‌دهند که این نتایج برای توابع مختلط برقرار نیستند.

۱۷۰۵ مثال. به ازای هر x حقیقی تعریف می‌کنیم

$$f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{32}$$

(می‌توان عبارت آخر را تعریف نمائی مختلط e^{ix} گرفت؛ برای بحث کاملی از این توابع، ر.ک. فصل ۰۸) در این صورت،

$$f(2\pi) - f(0) = 1 - 1 = 0, \tag{33}$$

اما

$$f'(x) = ie^{ix}; \tag{34}$$

در نتیجه، به ازای هر x حقیقی، $|f'(x)| = 1$.

بنابراین، قضیهٔ ۱۰۰۵ در این حالت برقرار نیست.

۱۸۰۵ مثال. برقطعهٔ $(0, 1)$ تعریف می‌کنیم $f(x) = x$ و

$$g(x) = x + x^2 e^{i/x^2}. \tag{35}$$

چون به ازای هر t ی حقیقی $|e^{it}| = 1$ ، مشاهده می‌کنیم که

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{36}$$

دیگر اینکه،

$$g'(x) = 1 + \left\{2x - \frac{2i}{x}\right\} e^{i/x^2} \qquad (0 < x < 1). \tag{37}$$

پس

$$|g'(x)| \geq \left|2x - \frac{2i}{x}\right| - 1 \geq \frac{2}{x} - 1. \tag{38}$$

لذا ،

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| = \frac{1}{|g'(x)|} \leq \frac{x}{2-x}; \tag{39}$$

و در نتیجه ،

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0. \tag{40}$$

بنابر (۳۶)و (۴۰) ، قاعدهٔ هوپیتال در این حالت برقرار نیست . همچنین ، توجه کنید که، بنابر (۳۸) ، $g'(x)$ بر $(0, 1)$ مخالف 0 است .

بهرحال ، قضیهٔ مقدار میانگین متضمن نتیجه‌ای است که ، از جهات کاربردی ، تقریبا" به سودمندی قضیهٔ ۱۰۰۵ است ، و برای توابع برداری نیز برقرارمی‌ماند : از قضیهٔ ۱۰۰۵ نتیجه می‌شود که

$$|f(b) - f(a)| \leq (b-a) \sup_{a<x<b} |f'(x)|. \tag{41}$$

۱۹۰۵ قضیه . فرض‌کنیم f یک نگاشت پیوسته از $[a, b]$ بتوی R^k و در (a, b) مشتقپذیر باشد . در این صورت ، x ی در (a, b) هست بطوری که

$$|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)| \leq (b-a)|\mathbf{f}'(x)|.$$

برهان[1] . قرار می‌دهیم $\mathbf{z} = \mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)$ ، و تعریف می‌کنیم

$$\varphi(t) = \mathbf{z}\cdot\mathbf{f}(t) \qquad (a \leq t \leq b).$$

دراین‌صورت ، φ یک تابع حقیقی پیوسته بر $[a, b]$ است که در (a, b) مشتق دارد . بنابراین ، قضیهٔ مقدار میانگین نشان می‌دهد که به ازای x ی در (a, b) ،

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(x) = (b-a)\mathbf{z}\cdot\mathbf{f}'(x) .$$

از سوی دیگر ،

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \mathbf{z}\cdot\mathbf{f}(b) - \mathbf{z}\cdot\mathbf{f}(a) = \mathbf{z}\cdot\mathbf{z} = |\mathbf{z}|^2.$$

حال نامساوی شوارتز نتیجه می‌دهد که

$$|\mathbf{z}|^2 = (b-a)|\mathbf{z}\cdot\mathbf{f}'(x)| \leq (b-a)|\mathbf{z}|\,|\mathbf{f}'(x)|.$$

---

۱. هاوین (V. P. Havin) چاپ دوم این کتاب را به روسی برگردانده ، این برهان را به برهان اصلـــی افزوده است .

پس $|\mathbf{z}| \le (b-a)|\mathbf{f}'(x)|$ ، که همان نتیجهٔ مطلوب است .

تمرین

۱ . فرض کنید f به ازای هر x حقیقی تعریف شده باشد ، و به‌ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم

$$|f(x)-f(y)| \le (x-y)^2 .$$

نشان دهید که f ثابت است .

۲ . فرض‌کنید $f'(x)$ در (a, b) بزرگتر از 0 باشد . ثابت‌کنیدکه f در (a, b) اکیدا " صعودی است ، و g را تابع معکوس آن بینگارید . ثابت کنید g مشتقپذیر است و

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (a<x<b).$$

۳ . فرض کنید g یک‌تابع حقیقی بر R^1 با مشتق کراندار باشد (مثلا" $|g'| \le M$) . $\varepsilon > 0$ را ثابت نگهداشته تعریف کنید $f(x) = x + \varepsilon g(x)$. ثابت کنید اگر ε به‌قدرکافی کوچک باشد ، f یک‌به‌یک خواهد بود . (می‌توان مجموعه‌ای از مقادیر مجاز ε را که فقط به M بستگی دارند معین کرد .)

۴ . اگر

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0,$$

که در آن $C_0, \ldots, C_n$ ثوابتی حقیقی هستند ، ثابت کنید معادلهٔ

$$C_0 + C_1 x + \cdots + C_{n-1} x^{n-1} + C_n x^n = 0$$

دست کم یک ریشهٔ حقیقی بین 0 و 1 دارد .

۵ . فرض کنید f به ازای هر $x > 0$ تعریف شده و مشتقپذیر باشد و ، وقتی $x \to +\infty$ ، $f'(x) \to 0$. قرار دهید $g(x) = f(x+1) - f(x)$. ثابت کنید وقتی $x \to +\infty$ ، $g(x) \to 0$.

۶ . فرض کنید

(آ) f به ازای $x \ge 0$ پیوسته باشد ؛

(ب) $f'(x)$ به ازای $x > 0$ وجود داشته باشد ؛

(پ) $f(0) = 0$ ؛

(ت) f' صعودی باشد .

قرار دهید

$$g(x)=\frac{f(x)}{x} \qquad (x>0)$$

و ثابت کنید g صعودی است .

۷ . فرض کنید $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشند، $g'(x)\neq 0$، و $f(x)=g(x)=0$. ثابت کنید

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(این مطلب برای توابع مختلط نیز برقرار است .)

۸ . فرض کنید f' بر $[a, b]$ پیوسته باشد و $\varepsilon>0$. ثابت کنید δ ی مثبتی هست بقسمی که هرگاه $0<|t-x|<\delta$، $a\leq x\leq b$ و $a\leq t\leq b$، آنگاه

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right|<\varepsilon،$$

(این مطلب را می‌شد این طور گفت که اگر f' بر $[a, b]$ پیوسته باشد ، f بر $[a, b]$ **به طور یکنواخت مشتقپذیر** است .) آیا این برای توابع برداری نیز برقرار هست ؟

۹ . فرض کنید f یک تابع حقیقی پیوسته بر R^1 باشد ، و بدانیم به ازای هر $x\neq 0$ ، $f'(x)$ وجود دارد و وقتی $x\to 0$ ، $f'(x)\to 3$. آیا از اینها وجود $f'(0)$ نتیجه می‌شود ؟

۱۰ . فرض کنید f و g توابع مشتقپذیر مختلطی بر $(0, 1)$ باشند . همچنین، وقتی $x\to 0$ ، $f(x)\to 0$ ، $g(x)\to 0$ ، $f'(x)\to A$ و $g'(x)\to B$ ، که در آنها A و B اعدادی مختلط اند و $B\neq 0$. ثابت کنید

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}.$$

قس . مثال ۱۸۰۵ . ***راهنمایی*** :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\frac{f(x)}{x}-A\right\}\cdot\frac{x}{g(x)}+A\cdot\frac{x}{g(x)}.$$

قضیهٔ ۱۳۰۵ را در مورد قسمتهای حقیقی و موهومی $f(x)/x$ و $g(x)/x$ به کار بندید .

۱۱ . فرض کنید f در یکی از همسایگیهای x تعریف شده و $f''(x)$ وجود داشته باشد . نشان دهید که

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x).$$

با یک مثال نشان دهید که حد فوق حتی اگر $f''(x)$ هم وجود نداشته باشد ممکن است موجود باشد . ***راهنمایی*** : از قضیهٔ ۱۳۰۵ استفاده کنید .

۱۲ . چنانچه $f(x)=|x|^3$ ، $f'(x)$ و $f''(x)$ را بــه ازای هر x حقیقی حساب کرده، نشان دهید که $f^{(3)}(0)$ وجود ندارد .

۱۳ . فرض کنید a و c اعدادی حقیقی بوده، $c>0$ ، و f بر $[-1,1]$ این طور تعریف شده باشد :

$$f(x)=\begin{cases} x^a \sin (x^{-c}) & (\text{اگر } x\neq 0), \\ 0 & (\text{اگر } x=0). \end{cases}$$

احکام زیر را ثابت کنید :

(آ) f پیوسته است اگر و فقط اگر $a>0$ ؛

(ب) $f'(0)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $a>1$ ؛

(پ) f' کراندار است اگر و فقط اگر $a\geq 1+c$ ؛

(ت) f' پیوسته است اگر و فقط اگر $a>1+c$ ؛

(ث) $f''(0)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $a>2+c$ ؛

(ج) f'' کراندار است اگر و فقط اگر $a\geq 2+2c$ ؛

(چ) f'' پیوسته است اگر و فقط اگر $a>2+2c$.

۱۴ . فرض کنید f یک تابع حقیقی مشتق‌پذیر باشد که در (a,b) تعریف شده است . ثابت کنید f محدب است اگر و فقط اگر f' صعودی باشد . بعد فرض کنید $f''(x)$ به ازای هر $x\in(a,b)$ وجود داشته باشد، و ثابت کنید f محدب است اگر و فقط اگر به ازای هر $x\in(a,b)$ ، $f''(x)\geq 0$.

۱۵ . فرض کنید $a\in R^1$ ، f یک تابع حقیقی و دوبــار مشتق‌پذیر بــر (a,∞) ، و M_0 ، M_1 و M_2 بترتیب کوچکترین کرانهای بالایی $|f(x)|$ ، $|f'(x)|$ ، و $|f''(x)|$ بر (a,∞) باشند . ثابت کنید

$$M_1^2\leq 4M_0M_2 .$$

راهنمایی : اگر $h>0$ ، قضیهٔ تیلور نشان می‌دهد که به ازای نقطه‌ای مانند $\xi\in(x,x+2h)$ ،

$$f'(x)=\frac{1}{2h}[f(x+2h)-f(x)]-hf''(\xi) .$$

لذا ،

$$|f'(x)|\leq hM_2+\frac{M_0}{h} .$$

برای نشان دادن اینکه $M_1^2=4M_0M_2$ می‌تواند عملاً روی دهد، a را -1 گرفته، تعریف کنید

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & (-1<x<0),\\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & (0\le x<\infty),\end{cases}$$

و نشان دهید $M_0=1$، $M_1=4$ و $M_2=4$.

آیا $M_1^2\le 4M_0M_2$ برای توابع برداری نیز برقرار است؟

۱۶ . فرض کنید f بر $(0,\infty)$ دوبار مشتقپذیر بوده، f'' بر $(0,\infty)$ کراندار باشد، و وقتی $x\to\infty$، $f(x)\to 0$. ثابت کنید وقتی $x\to\infty$، $f'(x)\to 0$.

راهنمایی: در تمرین ۱۵ فرض کنید $a\to\infty$.

۱۷ . فرض کنید f حقیقی و بر $[-1,1]$ سه بار مشتقپذیر باشد بطوری که

$$f(-1)=0,\qquad f(0)=0,\qquad f(1)=1,\qquad f'(0)=0.$$

ثابت کنید به ازای xی در $(-1,1)$، $f^{(3)}(x)\ge 3$.

توجه کنید که تساوی به ازای $\frac{1}{2}(x^3+x^2)$ برقرار است.

راهنمایی: از قضیهٔ ۱۵۰۵ با فرض $\alpha=0$ و $\beta=\pm1$ استفاده کرده، نشان دهید که sی در $(0,1)$ و tای در $(-1,0)$ هست که

$$f^{(3)}(s)+f^{(3)}(t)=6.$$

۱۸ . فرض کنید f تابعی حقیقی بر $[a,b]$ بوده، n عدد صحیح مثبتی باشد، و $f^{(n-1)}$ به ازای هر $t\in[a,b]$ وجود داشته باشد. α، β، و P را همانهایی بگیرید که در قضیهٔ تیلور (قضیهٔ ۱۵۰۵) آمدهاند. به ازای هر $t\in[a,b]$ که $t\neq\beta$ تعریف کنید

$$Q(t)=\frac{f(t)-f(\beta)}{t-\beta}.$$

از $f(t)-f(\beta)=(t-\beta)Q(t)$ در $t=\alpha$، $n-1$ بار مشتق بگیرید، و صورت زیر از قضیهٔ تیلور را به دست آورید:

$$f(\beta)=P(\beta)+\frac{Q^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^n.$$

۱۹ . فرض کنید f در $(-1,1)$ تعریف شده و $f'(0)$ وجود داشته باشد. همچنین، $-1<\alpha_n<\beta_n<1$، و وقتی $n\to\infty$، $\alpha_n\to 0$ و $\beta_n\to 0$. خارج قسمتهای تفاضلی

$$D_n=\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$$

را تعریف کرده، احکام زیر را ثابت نمایید:

(آ) هرگاه $\alpha_n<0<\beta_n$، آنگاه $\lim D_n=f'(0)$؛

(ب) هرگاه $0<\alpha_n<\beta_n$ و $\{\beta_n/(\beta_n-\alpha_n)\}$ کراندار باشد، آنگاه $\lim D_n=f'(0)$؛

(پ) هرگاه f' در $(-1,1)$ پیوسته باشد، آنگاه $\lim D_n=f'(0)$.

مثالی بزنید که در آن f در $(-1, 1)$ مشتقپذیربوده (ولی f' در ۰ پیوسته نباشد) ، و α_n و β_n طوری به ۰ میل کنند که $\lim D_n$ وجود داشته ولی با $f'(0)$ فرق داشته باشد .

۲۰ . یک نامساوی که از قضیهٔ تیلور حاصل شده و برای توابع برداری معتبر باشد تنظیم و آن را ثابت نمایید .

۲۱ . فرض کنید E یک زیر مجموعهٔ بستهٔ R^1 باشد . در تمرین ۲۲ ، فصل ۴ ، دیدیم که تابعی حقیقی و پیوسته مثل f بر R^1 هست که مجموعهٔ صفر آن E است . آیا می‌توان برای هر مجموعهٔ بستهٔ E چنین f ی یافت که بر R^1 مشتقپذیر باشد ، یا اینکه n بار مشتقپذیر باشد ، یا حتی از هر مرتبه‌ای بر R^1 مشتقپذیر باشد ؟

۲۲ . فرض کنید f تابعی حقیقی بر $(-\infty, \infty)$ باشد. x را یک **نقطهٔ ثابت** f خوانیم هرگاه $f(x) = x$.

(آ) چنانچه f مشتقپذیر بوده و به ازای هر t ی حقیقی $f'(t) \neq 1$ ، ثابت کنید f حداکثر یک نقطهٔ ثابت دارد .

(ب) نشان دهید تابع f تعریف شده با

$$f(t) = t + (1 + e^t)^{-1}$$

نقطهٔ ثابت ندارد ، هرچند که به ازای هر t ی حقیقی $0 < f'(t) < 1$.

(پ) بهرحال ، اگر عدد ثابتی مثل $A < 1$ باشد بطوری که به ازای هر t ی حقیقی $|f'(t)| \leq A$ ، ثابت کنید نقطهٔ ثابتی از f مانند x وجود دارد ، و $x = \lim x_n$ که در آن x_1 عدد حقیقی دلخواهی است و ، به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$x_{n+1} = f(x_n) \cdot$$

(ت) نشان دهید که فرایند (پ) را می‌شود با منحنی شکستهٔ

$$(x_1, x_2) \to (x_2, x_2) \to (x_2, x_3) \to (x_3, x_3) \to (x_3, x_4) \to \cdots$$

تجسم کرد .

۲۳ . تابع f تعریف شده با

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$$

سه نقطهٔ ثابت ، مثلاً α ، β ، و γ ، دارد که

$$-2 < \alpha < -1, \quad 0 < \beta < 1, \quad 1 < \gamma < 2.$$

با انتخاب x_1 به طور دلخواه ، $\{x_n\}$ را با فرض $x_{n+1} = f(x_n)$ تعریف نمایید .

(آ) هرگاه $x_1 < \alpha$ ، ثابت کنید وقتی $n \to \infty$ ، $x_n \to -\infty$.

(ب) هرگاه $\alpha < x_1 < \gamma$ ، ثابت کنید وقتی $n \to \infty$ ، $x_n \to \beta$.

(پ) چنانچه $\gamma < x_1$ ، ثابت کنید وقتی $n \to \infty$ ، $x_n \to +\infty$.

پس با این روش می‌توان جای β را مشخص کرد اما این عمل در مورد α و γ میسر نیست.

۲۴ . فرایند وصف شده در قسمت (پ) تمرین ۲۲ را می‌توان در مورد توابعی که $(0, \infty)$ را به $(0, \infty)$ می‌نگارند نیز به کار برد.

$\alpha > 1$ را ثابت نگهداشته، قرار دهید

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right), \qquad g(x) = \frac{\alpha + x}{1 + x}.$$

تنها نقطهٔ ثابت f و g در $(0, \infty)$ ، $\sqrt{\alpha}$ است. سعی کنید به کمک خواص f و g توضیح دهید که چرا همگرایی تمرین ۱۶ ، فصل ۳ ، از همگرایی تمرین ۱۷ بمراتب سریعتر است. (با مقایسهٔ f' و g' ، منحنی شکستهٔ پیشنهاد شده در تمرین ۲۲ را رسم نمایید.)

همین کار را زمانی که $0 < \alpha < 1$ انجام دهید.

۲۵ . فرض کنید f بر $[a, b]$ دوبار مشتقپذیر بوده، $f(a) < 0$ ، $f(b) > 0$ ، $f'(x) \geq \delta > 0$ ، و به‌ازای هر $x \in [a, b]$ ، $0 \leq f''(x) \leq M$. ξ را نقطهٔ منحصر بفردی در (a, b) بینگارید که $f(\xi) = 0$.

جزئیات روش نیوتن[1] برای محاسبهٔ ξ را که ذیلاً به‌اختصار آمده کامل نمایید:

(آ) x_1 ی در (ξ, b) اختیار، و $\{x_n\}$ را با

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

تعریف کنید. این را بر حسب مماس بر نمودار f تعبیر هندسی نمایید.

(ب) ثابت کنید که $x_{n+1} < x_n$ و

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi.$$

(پ) با استفاده از قضیهٔ تیلور نشان دهید که به ازای t_n ی در (ξ, x_n) ،

$$x_{n+1} - \xi = \frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2 .$$

---

1. Newton

(ت) چنانچه $A = M/2\delta$، نتیجه بگیرید که

$$0 \le x_{n+1} - \xi \le \frac{1}{A} [A(x_1 - \xi)]^{2^n}.$$

(قس. تمرینهای ۱۶ و ۱۸ در فصل ۳.)

(ث) نشان دهید که روش نیوتن معادل آن است که نقطهٔ ثابتی از تابع g را که با

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

تعریف می‌شود پیدا کنیم. رفتار $g'(x)$ به ازای x های نزدیک ξ چگونه است؟

(ج) بر $(-\infty, \infty)$ قرار دهید $f(x) = x^{1/3}$ و روش‌نیوتن‌را امتحان‌کنید. چه اتفاقی رخ می‌دهد؟

۲۶. فرض کنید f بر $[a, b]$ مشتقپذیر بوده، $f(a) = 0$، وعددی‌حقیقی مانند A باشد بطوری که بر $[a, b]$، $|f'(x)| \le A|f(x)|$. ثابت کنید به ازای هر $x \in [a, b]$، $f(x) = 0$.

راهنمایی: $x_0 \in [a, b]$ را ثابت نگهداشته، به ازای $a \le x \le x_0$ قرار دهید

$$M_0 = \sup |f(x)|, \qquad M_1 = \sup |f'(x)|.$$

برای هر چنین x ی

$$|f(x)| \le M_1(x_0 - a) \le A(x_0 - a)M_0.$$

درنتیجه،اگر $A(x_0 - a) < 1$، $M_0 = 0$یعنی، f بر $[a, x_0]$ مساوی 0 است. این‌عمل‌را ادامه دهید.

۲۷. فرض کنید ϕ یک تابع حقیقی باشد که بر مستطیل R در صفحه، که با $a \le x \le b$ و $\alpha \le y \le \beta$ داده شده، تعریف گشته است. بنا به تعریف، یک **جواب** مسئله با مقدار اولیهٔ

$$y' = \phi(x, y), \qquad y(a) = c \qquad (\alpha \le c \le \beta),$$

تابع مشتقپذیری چون f بر $[a, b]$ است که $f(a) = c$ ، $\alpha \le f(x) \le \beta$، و

$$f'(x) = \phi(x, f(x)) \qquad (a \le x \le b).$$

ثابت کنید این مسئله هرگاه عدد ثابتی مثل A باشد بطوری که هر وقت $(x, y_1) \in R$ و $(x, y_2) \in R$،

$$|\phi(x, y_2) - \phi(x, y_1)| \le A|y_2 - y_1|$$

حداکثر یک‌جواب‌خواهد داشت. **راهنمایی:** تمرین ۲۶ را در مورد تفاضل دو جواب به کار برید. توجه کنید که این قضیهٔ یکتایی برای مسئله با مقدار اولیهٔ

$$y' = y^{1/2}, \qquad y(0) = 0,$$

که دو جواب $f(x) = 0$ و $f(x) = x^2/4$ را دارد، برقرار نمی‌باشد. جمیع جوابهای

دیگر آن را بیابید .

۲۸ . قضیهٔ یکتایی مشابهی برای دستگاههای معادلات دیفرانسیل

$$y'_j = \phi_j(x, y_1, \ldots, y_k), \qquad y_j(a) = c_j \qquad (j = 1, \ldots, k),$$

تنظیم و آن را ثابت کنید . توجه کنید که این دستگاهها را می‌توان به شکل

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{\phi}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(a) = \mathbf{c}،$$

نوشت که در آن $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ در یک حجرهٔ k بعدی تغییر می‌کند ، $\boldsymbol{\phi}$ تگاشتی از یک حجرهٔ $(k+1)$ بعدی بتوی فضای اقلیدسی k بعدی است که مؤلفه‌هایش توابع $\phi_1, \ldots, \phi_k$ می‌باشند ، و $\mathbf{c}$ بردار $(c_1, \ldots, c_k)$ می‌باشد . برای توابع برداری تمرین ۲۶ را به کار برید .

۲۹ . به عنوان حالت خاصی از تمرین ۲۸ ، دستگاه زیر را در نظر بگیرید :

$$y'_j = y_{j+1} \qquad (j = 1, \ldots, k-1),$$

$$y'_k = f(x) - \sum_{j=1}^{k} g_j(x) y_j ,$$

که در آن f و $g_1, \ldots, g_k$ توابع حقیقی پیوسته‌ای بر $[a, b]$ می‌باشند ، و برای جوابهای معادلهٔ

$$y^{(k)} + g_k(x) y^{(k-1)} + \cdots + g_2(x) y' + g_1(x) y = f(x)$$

با شرایط اولیهٔ

$$y(a) = c_1, \qquad y'(a) = c_2, \qquad \ldots, \qquad y^{(k-1)}(a) = c_k$$

یک قضیهٔ یکتایی به دست آورید .

٦

انتگرال ریمان ـ اشتیل یس[1]

فصل حاضر را بر تعریف انتگرال ریمان، که به طرز بسیار روشنی به ترتیب موجود در خط حقیقی وابسته است، بنا نهاده‌ایم. بدین قرار، مطلب را با بحثی در باب انتگرالگیری توابع حقیقی بر بازه‌ها آغاز می‌کنیم. تعمیمش به تابعهای مختلط و برداری بر بازه‌ها در بخشهای بعدی می‌آید. انتگرالگیری روی مجموعه‌هایی جز بازه‌ها در فصول ۱۰ و ۱۱ مطرح خواهد شد.

تعریف و وجود انتگرال

۱۰۶ تعریف. فرض کنیم $[a, b]$ بازهٔ معلومی باشد. منظور از *افراز* P از $[a, b]$ یعنی مجموعه‌ای متناهی از نقاط مانند $x_0, x_1, \ldots, x_n$ که

$$a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = b.$$

می‌نویسیم

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

حال فرض کنیم f یک تابع حقیقی و کراندار باشد که بر $[a, b]$ تعریف شده است. به ازای هر افراز P از $[a, b]$ قرار می‌دهیم

$$M_i = \sup f(x) \qquad (x_{i-1} \le x \le x_i),$$
$$m_i = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \le x \le x_i),$$

---

1. Stieltjes

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i,$$

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i,$$

و، بالاخره،

$$\overline{\int_a^b} f \, dx = \inf U(P,f), \tag{1}$$

$$\underline{\int_a^b} f \, dx = \sup L(P,f), \tag{2}$$

که در آنها inf و sup روی تمام افرازهای P از $[a, b]$ گرفته شده‌اند. طرفهای چپ (۱) و (۲) بترتیب ***انتگرالهای ریمان بالایی و پایینی*** f روی $[a, b]$ نام دارند.

هرگاه انتگرالهای بالایی و پایینی مساوی باشند، می‌گوییم f بر $[a, b]$ ***ریمان–انتگرالپذیر*** است، می‌نویسیم $f \in \mathscr{R}$ (یعنی، $\mathscr{R}$ مجموعهٔ توابعی است که انتگرال ریمان دارند)، ومقدار مشترک (۱) و (۲) را با

$$\int_a^b f \, dx \tag{3}$$

یا با

$$\int_a^b f(x) \, dx \tag{4}$$

نشان می‌دهیم.

این ***انتگرال ریمان*** f روی $[a, b]$ می‌باشد. چون f کراندار است، دو عدد مانند m و M هستند بطوری که

$$m \le f(x) \le M \qquad (a \le x \le b).$$

پس، به ازای هر P،

$$m(b-a) \le L(P,f) \le U(P,f) \le M(b-a).$$

در نتیجه، اعداد $L(P,f)$ و $U(P,f)$ مجموعهٔ کرانداری را تشکیل می‌دهند. این امر نشان خواهد داد که ***انتگرالهای بالایی و پایینی هر تابع کراندار f تعریف شده‌اند.*** مسئلهٔ تساوی آنها، و در نتیجه، مشگل انتگرالپذیری f مسئلهٔ ظریفتری است. به جای آنکه این مسئله را جدا برای انتگرال ریمان بررسی کنیم مستقیماً به وضع کلیتری خواهیم پرداخت.

۶ ۰ ۲ تعریف . فرض کنیم α یک تابع صعودی بر $[a, b]$ باشد (چون $\alpha(a)$ و $\alpha(b)$ متناهی‌اند، نتیجه می‌شود کـه α بر $[a, b]$ کراندار است) . به ازای هر افراز P از $[a, b]$) می‌نویسیم

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}).$$

واضح‌است که $\Delta\alpha_i \geq 0$. به ازای هر تابع حقیقی و کراندار f بر $[a, b]$ قرارمی‌دهیم

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta\alpha_i ,$$
$$L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i ,$$

که در آنها M_i و m_i همان معـانی مذکور در تعریف ۶ ۰ ۱ را دارند، و تعریف می‌کنیم

$$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha = \inf U(P, f, \alpha), \tag{5}$$

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha = \sup L(P, f, \alpha), \tag{6}$$

که مجددا" inf و sup روی کلیهٔ افرازها گرفته شده‌اند .

هرگاه طرفهای چپ (۵) و (۶) مساوی باشند، مقدار مشترک آنها را با

$$\int_a^b f \, d\alpha \tag{7}$$

یا گاهی با

$$\int_a^b f(x) \, d\alpha(x) \tag{8}$$

نشان خواهیم داد .

این ***انتگرال ریمان ـ اشتیل یس*** (یا فقط ***انتگرال اشتیل یس***) f نسبت به α روی $[a, b]$ می‌باشد .

هرگاه (۷) وجود داشته باشد، یعنی اگر (۵) و (۶) مساوی باشند، می‌گوییم f نسبت به α ، به معنای ریمان، انتگرالپذیر است، و می‌نویسیم $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

با فرض $\alpha(x) = x$ دیده می‌شود که انتگرال ریمان حالت خاصی از انتگرال ریمان اشتیل یس است . بهرحال، باید بصراحت گفت که در حالت کلی حتی لزومی به پیوستگی α هم نیست .

راجع به نمادها مختصر توضیحی لازم است. ما نماد (۷) را به (۸) ترجیح می‌دهیم، زیرا حرف x که در عبارت (۸) آمده چیزی به مضمون (۷) نمی‌افزاید. اینکه چه "متغیر انتگرالگیری" را به کار می‌بریم اهمیتی نخواهد داشت. برای مثال، عبارت (۸) با

$$\int_a^b f(y)\, d\alpha(y)$$

یکی است. انتگرال به f ، α ، a ، و b بستگی دارد، لکن از متغیر انتگرالگیری فارغ است و می‌توان آن را حذف کرد.

نقش متغیر انتگرالگیری کاملاً" شبیه به نقش اندیس جمعبندی است: دو علامت

$$\sum_{i=1}^{n} c_i, \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k$$

یکی هستند، چرا که هر یک به معنی $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ می‌باشد.

البته، گذاردن متغیر انتگرالگیری ضرری ندارد، و در بسیاری حالات عملاً" تسهیلاتی را نیز موجب می‌شود.

حال به بررسی وجود انتگرال (۷) می‌پردازیم. بی‌آنکه دمبدم تکرار کنیم فرض می‌کنیم f بر $[a, b]$ حقیقی و کراندار و α بر این بازه صعودی باشد؛ و، وقتی ابهامی در کار نیست، به جای $\int_a^b$ می‌نویسیم $\int$.

۳۰۶ تعریف. افراز P^* را یک **تظریف** P نامیم هرگاه $P^* \supset P$ (یعنی، هرگاه هر نقطهٔ P یک نقطهٔ P^* باشد). چنانچه دو افراز P_1 و P_2 مفروض باشند، می‌گوییم P^* **تظریف مشترک** آنهاست در صورتی که $P^* = P_1 \cup P_2$.

۴۰۶ قضیه. هرگاه P^* یک تظریف P باشد، آنگاه

$$L(P, f, \alpha) \le L(P^*, f, \alpha) \tag{9}$$

و

$$U(P^*, f, \alpha) \le U(P, f, \alpha). \tag{10}$$

برهان. برای اثبات (۹) ابتدا فرض می‌کنیم P^* فقط یک نقطه از P بیشتر داشته باشد.

این نقطهٔ اضافی را x^* انگاشته، فرض می‌کنیم $x_{i-1} < x^* < x_i$ که در آن x_{i-1} و x_i دو نقطهٔ متوالی P می‌باشند. قرار می‌دهیم

$$w_1 = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \le x \le x^*),$$
$$w_2 = \inf f(x) \qquad (x^* \le x \le x_i).$$

واضح است که $w_1 \ge m_i$ و $w_2 \ge m_i$ که در آنها، مثل قبل،

$$m_i = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \le x \le x_i).$$

در نتیجه،

$$L(P^*, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$$
$$= w_1[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + w_2[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] - m_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$$
$$= (w_1 - m_i)[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + (w_2 - m_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] \ge 0.$$

چنانچه P^*، k نقطه بیش از P داشته باشد، این استدلال را k بار تکرار کرده به (۹) خواهیم رسید. اثبات نامساوی (۱۰) به همین نحو خواهد بود.

۵۰۶ قضیه. $\underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \overline{\int_a^b} f\,d\alpha$.

برهان. فرض‌کنیم P^* تظریف مشترک دو افراز P_1 و P_2 باشد. بنابر قضیهٔ ۴۰۶،

$$L(P_1, f, \alpha) \le L(P^*, f, \alpha) \le U(P^*, f, \alpha) \le U(P_2, f, \alpha).$$

در نتیجه،

$$L(P_1, f, \alpha) \le U(P_2, f, \alpha). \tag{11}$$

چنانچه P_2 ثابت باشد و sup روی تمام P_1 ها گرفته شود، (۱۱) به دست خواهد داد که

$$\underline{\int} f\,d\alpha \le U(P_2, f, \alpha). \tag{12}$$

قضیه با گرفتن inf روی جمیع P_2 ها در (۱۲) نتیجه خواهد شد.

۶۰۶ قضیه. $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ ***بر*** $[a, b]$ ***اگر و فقط اگر به ازای*** $\varepsilon > 0$ ***افرازی مانند*** P ***باشد بطوری که***

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon.$$

برهان. به ازای هر P داریم

$$L(P,f,\alpha) \le \underline{\int} f\,d\alpha \le \overline{\int} f\,d\alpha \le U(P,f,\alpha).$$

لذا، (۱۳) ایجاب می‌کند که

$$0 \le \overline{\int} f\,d\alpha - \underline{\int} f\,d\alpha < \varepsilon.$$

پس، اگر (۱۳) بتواند به ازای هر $\varepsilon > 0$ برقرار شود، خواهیم داشت

$$\overline{\int} f\,d\alpha = \underline{\int} f\,d\alpha.$$

یعنی، $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

بعکس، فرض کنیم $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت، افرازهای P_1 و P_2 ای هستند بطوری که

$$U(P_2,f,\alpha) - \int f\,d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{14}$$

$$\int f\,d\alpha - L(P_1,f,\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

P را تظریف مشترک P_1 و P_2 می‌گیریم. پس قضیهٔ ۴.۶، در معیت (۱۴) و (۱۵)، نشان می‌دهد که

$$U(P,f,\alpha) \le U(P_2,f,\alpha) < \int f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1,f,\alpha) + \varepsilon \le L(P,f,\alpha) + \varepsilon.$$

درنتیجه، (۱۳) به ازای این افراز P برقرار است.

قضیهٔ ۶.۶ برای انتگرالپذیری محک مناسبی به دست می‌دهد. پیش از به کار بردنش، چند نکته را که با آن ارتباط نزدیک دارند بیان می‌داریم.

۷.۶ قضیه

(آ) هرگاه به ازای P و ε ی رابطهٔ (۱۳) برقرار باشد، (۱۳) به ازای هر تظریف P (با همین ε) نیز برقرار می‌شود.

(ب) هرگاه (۱۳) به ازای $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ برقرار باشد و s_i و t_i نقاط دلخواهی در $[x_{i-1}, x_i]$ باشند،

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\,\Delta\alpha_i < \varepsilon.$$

(پ) هرگاه $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ و مفروضات (ب) برقرار باشند،

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta\alpha_i - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \varepsilon.$$

برهان. قضیهٔ ۴.۶ قسمت (آ) را ایجاب می‌کند. تحت شرطهای آمده در (ب)، هم $f(s_i)$ در $[m_i, M_i]$ است و هم $f(t_i)$. پس $|f(s_i) - f(t_i)| \le M_i - m_i$. لذا،

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\,\Delta\alpha_i \le U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha),$$

که (ب) را ثابت می‌کند. نامساویهای بدیهی

$$L(P,f,\alpha) \le \sum f(t_i)\,\Delta\alpha_i \le U(P,f,\alpha)$$

و

$$L(P,f,\alpha) \le \int f\,d\alpha \le U(P,f,\alpha)$$

(پ) را ثابت خواهند کرد.

۸.۶ قضیه. هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند. η ی بزرگتر از 0 را طوری می‌گیریم که

$$[\alpha(b) - \alpha(a)]\eta < \varepsilon.$$

چون f بر $[a, b]$ به طور یکنواخت پیوسته است (قضیهٔ ۱۹.۴)، پس δ ی مثبتی هست بطوری که اگر $x \in [a, b]$، $t \in [a, b]$، و $|x - t| < \delta$، داریم

$$|f(x) - f(t)| < \eta. \tag{16}$$

هرگاه P چنان افرازی از $[a, b]$ باشد که به ازای هر i، $\Delta x_i < \delta$، آنگاه (۱۶) ایجاب می‌کند که

$$M_i - m_i \le \eta \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{17}$$

و در نتیجه،

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta\alpha_i$$

$$\le \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \eta[\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon.$$

حال، بنابر قضیهٔ ۶.۶، $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

۹۰۶ قضیه. هرگاه f بر $[a, b]$ یکنوا و α بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه $f \in \mathscr{R}(\alpha)$. (البته، هنوز بر این فرضیم که α یکنواست).

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند. به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، افرازی را برمی‌گزینیم که در آن

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

این کار به دلیل پیوسته بودن α میسر است (قضیهٔ ۲۳۰۴).

فرض کنیم f صعودی باشد (اثبات در حالت دیگر به همین نحو است).

در این صورت،

$$M_i = f(x_i), \qquad m_i = f(x_{i-1}) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

پس اگر n به قدر کافی بزرگ باشد،

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$$

$$= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \cdot [f(b) - f(a)] < \varepsilon.$$

حال، بنابر قضیهٔ ۶۰۶، $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

۱۰۰۶ قضیه. فرض کنیم f بر $[a, b]$ کراندار بوده، تعدادی متناهی نقطهٔ ناپیوستگی بر $[a, b]$ داشته، و α در هر نقطهٔ ناپیوستگی‌اش پیوسته باشد. در این صورت، $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. قرار می‌دهیم $M = \sup |f(x)|$، و E را مجموعهٔ نقاطی می‌انگاریم که f در انها ناپیوسته است. چون E متناهی و α در هر نقطهٔ E پیوسته‌است، می‌توان E را با تعدادی متناهی بازهٔ ازهم جدای $[u_j, v_j] \subset [a, b]$ پوشاند که مجموع تفاضلهای $\alpha(v_j) - \alpha(u_j)$ آنها از ε کمتر باشد. بعلاوه، می‌توان این‌بازه‌ها را قسمی گرفت که هر نقطهٔ $E \cap (a, b)$ درون یکی از $[u_j, v_j]$ ها باشد.

قطعه‌های (u_j, v_j) را از $[a, b]$ برمی‌داریم. مجموعهٔ ماندهٔ K فشرده است.

پس f بر K به طور یکنواخت پیوسته است، و δ ی مثبتی هست بطوری که اگر $s \in K$, $t \in K$، و $|s - t| < \delta$، داریم $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$.

حال افراز $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ از $[a, b]$ را به صورت زیر می‌سازیم: هر u_j و هر v_j در P باشد و هیچ نقطه از قطعهٔ (u_j, v_j) در P نباشد؛ و هرگاه x_{i-1} یکی از u_j ها نباشد، آنگاه $\Delta x_i < \delta$.

توجه شود که به ازای هر i، $M_i - m_i \le 2M$، و $M_i - m_i \le \varepsilon$ مگر آنکه x_{i-1} یکی از u_j ها باشد. درنتیجه، مثل برهان قضیهٔ ۸.۶، داریم

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) \le [\alpha(b) - \alpha(a)]\varepsilon + 2M\varepsilon.$$

چون ε دلخواه است، قضیهٔ ۶.۶ نشان خواهد داد که $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

توجه: هرگاه f و α نقطهٔ ناپیوستگی مشترکی داشته باشند، f الزاماً در $\mathscr{R}(\alpha)$ نخواهد بود. تمرین ۳ این مطلب را نشان خواهد داد.

۱۱.۶ قضیه. فرض کنیم $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ **بر** $[a, b]$، $m \le f \le M$، ϕ **بر** $[m, M]$ **پیوسته باشد، و** $h(x) = \phi(f(x))$ **بر** $[a, b]$. **دراین صورت،** $h\in\mathscr{R}(\alpha)$ **بر** $[a, b]$.

برهان. $\varepsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. چون ϕ بر $[m, M]$ به طور یکنواخت پیوسته است، δ ی مثبتی وجود دارد بقسمی که $\delta < \varepsilon$ و، اگر $s, t\in[m, M]$ و $|s-t|\le\delta$، $|\phi(s)-\phi(t)| < \varepsilon$.

چون $f\in\mathscr{R}(\alpha)$، افرازی مثل $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ از $[a, b]$ هست بطوری که

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \delta^2. \tag{18}$$

فرض کنیم M_i و m_i همان معانی مذکور در تعریف ۱.۶ را داشته و M_i^* و m_i^* اعداد نظیر آنها برای h باشند. اعداد $1, \ldots, n$ را به دو رده تقسیم می‌کنیم: گوییم اگر $M_i - m_i < \delta$، $i\in A$ و، اگر $M_i - m_i \ge \delta$، $i\in B$.

به ازای $i\in A$، δ ی انتخابی ما نشان می‌دهد که $M_i^* - m_i^* \le \varepsilon$.

به ازای $i\in B$، $M_i^* - m_i^* \le 2K$ که در آن $K=\sup|\phi(t)|$ و $m\le t\le M$. بنابر (۱۸) خواهیم داشت

$$\delta\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i \le \sum_{i\in B}(M_i - m_i)\,\Delta\alpha_i < \delta^2. \tag{19}$$

پس $\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i < \delta$. از این نتیجه می‌شود که

$$U(P, h, \alpha) - L(P, h, \alpha) = \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*) \Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*) \Delta\alpha_i$$
$$\leq \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta < \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K].$$

چون ε دلخواه بود ، قضیهٔ ۶.۶ ایجاب خواهد کرد که $h \in \mathscr{R}(\alpha)$.

تبصره . قضیهٔ فوق این سؤال را پیش می‌آورد که "دقیقا" چه توابعی انتگرال ریمان دارند ؟" جوابش در قضیهٔ ۱۱.۳۳ (ب) داده شده است .

خواص انتگرال

۱۲.۶ قضیه

(آ) هرگاه $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha)$ و $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ ، آنگاه
$$f_1 + f_2 \in \mathscr{R}(\alpha).$$
$cf \in \mathscr{R}(\alpha)$ به ازای هر ثابت c ، و

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, d\alpha = \int_a^b f_1\, d\alpha + \int_a^b f_2\, d\alpha,$$

$$\int_a^b cf\, d\alpha = c \int_a^b f\, d\alpha.$$

(ب) هرگاه $f_1(x) \leq f_2(x)$ بر $[a, b]$ ، آنگاه

$$\int_a^b f_1\, d\alpha \leq \int_a^b f_2\, d\alpha.$$

(پ) هرگاه $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ و $a < c < b$ ، آنگاه $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ بر $[a, c]$ و بر $[c, b]$ و داریم

$$\int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha.$$

(ت) هرگاه $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ و، بر $[a, b]$ ، $|f(x)| \leq M$ ، آنگاه
$$\left| \int_a^b f\, d\alpha \right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(ث) هرگاه $f \in \mathscr{R}(\alpha_1)$ و $f \in \mathscr{R}(\alpha_2)$ ، آنگاه $f \in \mathscr{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ و
$$\int_a^b f\, d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f\, d\alpha_1 + \int_a^b f\, d\alpha_2 .$$
چنانچه $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ و c عدد ثابت مثبتی باشد ، $f \in \mathscr{R}(c\alpha)$ و
$$\int_a^b f\, d(c\alpha) = c \int_a^b f\, d\alpha.$$

برهان. هرگاه $f=f_1+f_2$ و P افراز دلخواهی از $[a,b]$ باشد، داریم

$$L(P,f_1,\alpha)+L(P,f_2,\alpha)\le L(P,f,\alpha) \tag{20}$$
$$\le U(P,f,\alpha)\le U(P,f_1,\alpha)+U(P,f_2,\alpha).$$

فرض مـی‌کنیم $f_1\in\mathscr{R}(\alpha)$ و $f_2\in\mathscr{R}(\alpha)$، و $\varepsilon>0$ را معلوم مـی‌گیریم. در این صورت، افرازهای P_j $(j=1,2)$ ای وجود دارند بطوری که

$$U(P_j,f_j,\alpha)-L(P_j,f_j,\alpha)<\varepsilon.$$

چنانچه به جای P_1 و P_2 تظریف‌مشترکشان P قرار گیرد، باز هم این نامساویهابرقرارند. پس (۲۰) نامساوی

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<2\varepsilon$$

را ایجاب می‌کند، که این $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ را ثابت خواهد کرد.

با همین P داریم

$$U(P,f_j,\alpha)<\int f_j\,d\alpha+\varepsilon \qquad (j=1,2).$$

درنتیجه، (۲۰) ایجاب می‌کند که

$$\int f\,d\alpha\le U(P,f,\alpha)<\int f_1\,d\alpha+\int f_2\,d\alpha+2\varepsilon.$$

چون ε دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم که

$$\int f\,d\alpha\le\int f_1\,d\alpha+\int f_2\,d\alpha. \tag{21}$$

چنانچه در (۲۱) f_1 و f_2 را با $-f_1$ و $-f_2$ عوض کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود و تساوی اثبات خواهد شد.

اثبات‌احکام دیگرقضیهٔ ۱۲۰۶ آنقدر شبیه است که جزئیات آنها را حذف می‌کنیم. در قسمت (پ) نکته این است که برای تقرب به $\int f\,d\alpha$ می‌توان (با توسل به تظریفها) خود را به افرازهایی محدود ساخت که شامل نقطهٔ c می‌باشند.

۱۳۰۶ قضیه. هرگاه $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ و $g\in\mathscr{R}(\alpha)$ **بر** $[a,b]$، **آنگاه**

(آ) $fg\in\mathscr{R}(\alpha)$؛

(ب) $|f|\in\mathscr{R}(\alpha)$ و $\left|\int_a^b f\,d\alpha\right|\le\int_a^b|f|\,d\alpha$.

برهان. هـرگاه $\phi(t)$ را مسـاوی t^2 بگیـریم، قضیـهٔ ۱۱۰۶ نشان می‌دهد که اگر $f\in\mathscr{R}(\alpha)$، $f^2\in\mathscr{R}(\alpha)$. حال اتحاد

$$4fg=(f+g)^2-(f-g)^2$$

برهان (آ) را تمام خواهد کرد.

چنانچه $\phi(t)$ را $|t|$ بگیریم، قضیهٔ ۱۱۰۶ مشابها" نشان می‌دهد که $|f| \in \mathscr{R}(\alpha)$. c را مساوی ± 1 اختیار می‌کنیم بطوری که

$$c \int f\,d\alpha \geq 0.$$

در این صورت، چون $cf \leq |f|$،

$$\left| \int f\,d\alpha \right| = c \int f\,d\alpha = \int cf\,d\alpha \leq \int |f|\,d\alpha.$$

۱۴۰۶ تعریف. تابع پله‌ای یکهٔ I این طور تعریف می‌شود:

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

۱۵۰۶ قضیه. هرگاه $a < s < b$، f بر $[a, b]$ کراندار و در s پیوسته باشد، و $\alpha(x) = I(x - s)$، آنگاه

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(s).$$

برهان. افرازهای $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ را، که در آنها $x_0 = a$ و $x_1 = s < x_2 < x_3 = b$، در نظر می‌گیریم. در این صورت،

$$U(P, f, \alpha) = M_2, \qquad L(P, f, \alpha) = m_2.$$

چون f در s پیوسته است، می‌بینیم که وقتی $x_2 \to s$، M_2 و m_2 همگرا به $f(s)$ خواهند بود.

۱۶۰۶ قضیه. فرض‌کنیم به‌ازای $1, 2, 3, \ldots$، $c_n \geq 0$، Σc_n همگرا بوده، $\{s_n\}$ دنباله‌ای از نقاط متمایز در (a, b) باشد، و

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n). \tag{22}$$

در این صورت، اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد،

$$\int_a^b f\,d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n). \tag{23}$$

برهان. آزمون مقایسه‌ای نشان می‌دهد که سری (۲۲) به ازای هر x همگراست. واضح است که مجموع آن $\alpha(x)$ یکنواست، و $\alpha(a) = 0$ و $\alpha(b) = \Sigma c_n$. (این α از نوع آن تابعی است که در تبصرهٔ ۳۱۰۴ آمده بود.)

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند، و N را طوری اختیار می‌کنیم که

$$\sum_{N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon.$$

قرار می‌دهیم

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I(x - s_n), \qquad \alpha_2(x) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n I(x - s_n).$$

بنابر قضایای ۱۲۰۶ و ۱۵۰۶ داریم

$$\int_a^b f\, d\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n). \tag{24}$$

چون $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) < \varepsilon$،

$$\left|\int_a^b f\, d\alpha_2\right| \le M\varepsilon \tag{25}$$

که در آن $M = \sup|f(x)|$. ازآنجا که $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$، از (۲۴) و (۲۵) نتیجه می‌شود که

$$\left|\int_a^b f\, d\alpha - \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n)\right| \le M\varepsilon. \tag{26}$$

چنانچه $N \to \infty$ ، رابطهٔ (۲۳) به دستمان خواهد رسید.

۱۷۰۶ قضیه. فرض کنیم α صعودی باشد و $\alpha' \in \mathscr{R}$ بر $[a, b]$. همچنین، f را یک تابع حقیقی و کراندار بر $[a, b]$ می‌انگاریم.

در این صورت، $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ اگر و فقط اگر $f\alpha' \in \mathscr{R}$. در این وضع،

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx. \tag{27}$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، و قضیهٔ ۶۰۶ را در مورد α' به کار می‌بریم: گوییم افرازی مانند $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ از $[a, b]$ هست بطوری که

$$U(P, \alpha') - L(P, \alpha') < \varepsilon. \tag{28}$$

قضیهٔ مقدار میانگین نقاطی چون $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ را به دست می‌دهد که به ازای هر $i = 1, \ldots, n$ ،

$$\Delta\alpha_i = \alpha'(t_i)\,\Delta x_i\,.$$

هرگاه $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ، آنگاه بنابر (۲۸) و قضیهٔ ۷۰۶ (ب) داریم

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)|\,\Delta x_i < \varepsilon\,. \tag{29}$$

قرار می‌دهیم $M = \sup|f(x)|$. چون

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(t_i)\,\Delta x_i\,,$$

از (۲۹) نتیجه می‌شود که

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)\,\Delta x_i\right| \le M\varepsilon. \tag{30}$$

بخصوص، به ازای هر انتخاب $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ داریم

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\Delta\alpha_i \le U(P, f\alpha') + M\varepsilon.$$

پس

$$U(P, f, \alpha) \le U(P, f\alpha') + M\varepsilon.$$

با همین استدلال، از (۳۰) به نامساوی

$$U(P, f\alpha') \le U(P, f, \alpha) + M\varepsilon$$

می‌رسیم. لذا، خواهیم داشت

$$|\,U(P, f, \alpha) - U(P, f\alpha')| \le M\varepsilon. \tag{31}$$

حال توجه می‌کنیم کــه (۲۸) از تعویض P با هر تظریف آن بــرقرار می‌ماند. پس (۳۱) نیز برقرار خواهد ماند. لذا، نتیجه می‌گیریم که

$$\left|\overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,dx\right| \le M\varepsilon.$$

اما ε دلخواه است. بنابراین، به ازای هر تابع کراندار f ،

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,dx. \tag{32}$$

تساوی انتگرالهای پایینی درست به همین نحو از (۳۰) به دست می‌آید، و قضیه نتیجه خواهد شد.

۱۸۰۶ تبصره. دو قضیهٔ پیش جامعیت و قابلیت انعطافی را که در ذات عمل انتگرالگیری اشتیل یس است نشان می‌دهند. هرگاه α یک تابع پله‌ای صرف بــاشد [این نامی است که

اغلب به توابع (۲۲) اطلاق مـی‌شود] ، انتگرال به یک سری متناهی یا نامتناهی‌تحویل می‌شود . چنانچه α مشتق انتگرالپذیر داشته باشد ، انتگرال به یک انتگرال ریمان عادی بدل می‌گردد .این در بسیاری از حالات مطالعهٔ سریها و انتگرالها را با هم میسر خواهد ساخت .

برای روشن شدن‌این نکته به یک مثال فیزیکی توجه می‌کنیم . گشتاور ماند یک سیم مستقیم به‌طول یک‌حول محوری که از یکی از نقاط انتهایی آن گذشته و با آن زاویهٔ قائمه می‌سازد برابر است با

$$\int_0^1 x^2\, dm \tag{33}$$

که در آن $m(x)$ جرم موجود در بازهٔ $[0, x]$ می‌باشد . چنانچه این فرض بشود که سیم چگالی پیوستهٔ ρ دارد ، یعنی $m'(x) = \rho(x)$ ، (۳۳) به صورت

$$\int_0^1 x^2\, \rho(x)\, dx \tag{34}$$

در می‌آید .

از سوی دیگر، اگر سیم از جرمهای m_i که در نقاط x_i متمرکز شده‌اند تشکیل شده باشد ، (۳۳) چنین خواهد شد :

$$\sum x_i^2\, m_i . \tag{35}$$

لذا ، (۳۳) عبارات (۳۴) و (۳۵) را بـه عنـوان حالاتی خاص در بر دارد ، اما حالات‌زیاد دیگری را نیز شامل است . مثلا" ، شامل حالتی است‌که در آن m پیوسته بوده ولی همه جا مشتقپذیر نمی‌باشد .

۱۹۰۶ قضیه (تغییر متغیر) . فـرض‌کنیم φ یک تـابع اکیدا" صعودی و پیوسته باشد که بـازهٔ $[A, B]$ را بروی $[a, b]$ مـی‌نـگارد . همچنین ، α بر $[a, b]$ صعودی باشد و $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$. β و g را بر $[A, B]$ این طور تعریف می‌کنیم :

$$\beta(y) = \alpha(\varphi(y)), \qquad g(y) = f(\varphi(y)). \tag{36}$$

در این صورت ، $g \in \mathscr{R}(\beta)$ و

$$\int_A^B g\, d\beta = \int_a^b f\, d\alpha. \tag{37}$$

برهان . هرافراز $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ از $[a, b]$ نظیر افرازی مانند $Q = \{y_0, \ldots, y_n\}$

از $[A, B]$ است بطوری که $x_i = \varphi(y_i)$. جمیع افرازهای $[A, B]$ از این راه به دست می‌آیند. چون مقادیری که f بر $[x_{i-1}, x_i]$ می‌گیرد درست همانهایی هستند که g بر $[y_{i-1}, y_i]$ اخذ می‌کند، خواهیم دید که

$$U(Q, g, \beta) = U(P, f, \alpha), \quad L(Q, g, \beta) = L(P, f, \alpha). \tag{38}$$

و چونکه $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ ، P را می‌شود طوری اختیار کرد که هر دوی $U(P, f, \alpha)$ و $L(P, f, \alpha)$ به $\int f\, d\alpha$ نزدیک باشند. لذا، (۳۸)، در معیت قضیهٔ ۶۰۶، نشان می‌دهد که $g \in \mathscr{R}(\beta)$ ، و (۳۷) برقرار است. این برهان را تمام خواهد کرد.

اینک به حالت خاص زیر توجه می‌کنیم:

فرض می‌کنیم $\alpha(x) = x$. پس $\beta = \varphi$. گیریم $\varphi' \in \mathscr{R}$ بر $[A, B]$. اگر قضیهٔ ۱۷۰۶ را سمت چپ (۳۷) اعمال کنیم، خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)\, dy. \tag{39}$$

انتگرالگیری ومشتقگیری

ما در این بخش هنوز پابند توابع حقیقی هستیم. نشان خواهیم داد که اعمال انتگرالگیری و مشتقگیری، بنوعی، معکوس یکدیگرند.

۲۰۰۶ قضیه. فرض کنیم $f \in \mathscr{R}$ بر $[a, b]$. به ازای $a \le x \le b$ قرار می‌دهیم

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

در این صورت، F بر $[a, b]$ پیوسته است؛ بعلاوه، هرگاه f در نقطهٔ x_0 از $[a, b]$ پیوسته باشد، F در x_0 مشتقپذیر است و

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

برهان. چون $f \in \mathscr{R}$ ، f کراندار است. فرض کنیم به ازای $a \le t \le b$ ، $|f(t)| \le M$. هرگاه $a \le x < y \le b$ آنگاه، بنابر قضیهٔ ۱۲۰۶ (پ) و (ت)،

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\, dt\right| \le M(y - x).$$

اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد، خواهیم دید که با شرط $|y - x| < \varepsilon/M$ داریم

$$|F(y) - F(x)| < \varepsilon.$$

این پیوستگی (و، درواقع، پیوستگی یکنواخت) F را ثابت می‌کند.

حال فرض می‌کنیم f در x_0 پیوسته باشد. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده $\delta > 0$ را طوری می‌گیریم که اگر $|t - x_0| < \delta$ و $a \le t \le b$ داشته باشیم

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

پس، اگر

$$x_0 - \delta < s \le x_0 \le t < x_0 + \delta, \qquad a \le s < t \le b.$$

بنابر قضیهٔ ۱۲۰۶ (ت)، خواهیم داشت

$$\left|\frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{t - s}\int_s^t [f(u) - f(x_0)]\, du\right| < \varepsilon.$$

از این نتیجه می‌شود که $F'(x_0) = f(x_0)$.

۲۱۰۶ قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. هرگاه $f \in \mathscr{R}$ بر $[a, b]$ و تابع مشتقپذیر F بر $[a, b]$ چنان باشد که $F' = f$، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. افراز $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ از $[a, b]$ را طوری اختیار می‌کنیم که $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. قضیهٔ مقدار میانگین نقاطی مانند $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ را به دست می‌دهد که به ازای هر $i = 1, \ldots, n$

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\, \Delta x_i.$$

بنابراین،

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)\, \Delta x_i = F(b) - F(a).$$

حال از قضیهٔ ۷۰۶ (پ) نتیجه می‌شود که

$$\left|F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \varepsilon.$$

چون این نامساوی به ازای هر $\varepsilon > 0$ برقرار است، برهان تمام خواهد بود.

۲۲۰۶ قضیه (انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به‌جزء). فرض کنیم F و G توابع مشتقپذیری

بر $[a, b]$ باشند، $F' = f \in \mathscr{R}$ و $G' = g \in \mathscr{R}$. در این صورت،

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx.$$

برهان. قرار می‌دهیم $H(x) = F(x)G(x)$ ، و قضیهٔ ۲۱۰۶ را در مورد H و مشتقش به کار می‌بریم. توجه کنید که، بنابر قضیهٔ ۱۳۰۶، $H' \in \mathscr{R}$.

انتگرالگیری از توابع برداری

۲۳۰۶ تعریف. فرض کنیم $f_1, \ldots, f_k$ توابعی حقیقی بر $[a, b]$ ، و $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_k)$ نگاشت نظیر آنها از $[a, b]$ بتوی R^k باشد. چنانچه α بر $[a, b]$ صعود کند، منظور از $\mathbf{f} \in \mathscr{R}(\alpha)$ این خواهد بود که به ازای هر $j = 1, \ldots, k$ ، $f_j \in \mathscr{R}(\alpha)$. در این حالت است که تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b \mathbf{f}\,d\alpha = \left(\int_a^b f_1\,d\alpha, \ldots, \int_a^b f_k\,d\alpha\right).$$

به عبارت دیگر، $\int \mathbf{f}\,d\alpha$ آن نقطه در R^k است که مختص j م آن $\int f_j\,d\alpha$ می‌باشد.

واضح است که قسمتهای (آ)، (پ)، و (ث) قضیهٔ ۱۲۰۶ برای این انتگرالهای برداری‌معتبرند؛ کافی است نتایج پیشتر را در مورد هر مختص به‌کار بریم. همین مطلب دربارهٔ قضایای ۱۷۰۶، ۲۰۰۶، و ۲۱۰۶ صحیح است. در توضیح این امر، شبیه قضیهٔ ۲۱۰۶ را بیان می‌داریم.

۲۴۰۶ قضیه. هرگاه $\mathbf{f}$ و $\mathbf{F}$ *بازهٔ* $[a, b]$ *را بتوی* R^k *بنگارند،* $\mathbf{f} \in \mathscr{R}$ *بر* $[a, b]$ ، *و* $\mathbf{F}' = \mathbf{f}$ ، *آنگاه*

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a).$$

شبیه قضیهٔ ۱۳۰۶(ب) کیفیات نوی را، دست کم در برهانش، از خود بروز می‌دهد.

۲۵۰۶ قضیه. هرگاه $\mathbf{f}$ *بازهٔ* $[a, b]$ *را بتوی* R^k *بنگارد و، به ازای تابعی صعودی* α *چون بر* $[a, b]$ ، $\mathbf{f} \in \mathscr{R}(\alpha)$ ، *آنگاه* $|\mathbf{f}| \in \mathscr{R}(\alpha)$ *و*

$$\left|\int_a^b \mathbf{f}\,d\alpha\right| \le \int_a^b |\mathbf{f}|\,d\alpha. \tag{40}$$

برهان. هرگاه $f_1, \ldots, f_k$ مؤلفه‌های $\mathbf{f}$ باشند، آنگاه

$$|\mathbf{f}| = (f_1^2 + \cdots + f_k^2)^{1/2}. \tag{41}$$

بنابر قضیهٔ ۱۱۰۶، هر f_i^2 متعلق‌به $\mathscr{R}(\alpha)$ است. پس مجموع آنها نیز چنین خواهد بود. چون x^2 تابع پیوسته‌ای از x است، قضیهٔ ۱۷۰۴ نشان می‌دهد که تابع ریشهٔ دوم به ازای هر M حقیقی بر $[0, M]$ پیوسته می‌باشد. اگر قضیهٔ ۱۱۰۶ را بار دیگربه کار بریم، (۴۱) نشان خواهد داد که $|\mathbf{f}| \in \mathscr{R}(\alpha)$.

برای اثبات (۴۰) قرار می‌دهیم $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ که درآن $y_j = \int f_j\, d\alpha$. در این صورت، داریم $\mathbf{y} = \int \mathbf{f}\, d\alpha$ و

$$|\mathbf{y}|^2 = \sum y_i^2 = \sum y_j \int f_j\, d\alpha = \int \left(\sum y_j f_j\right) d\alpha.$$

بنابر نامساوی شوارتز،

$$\sum y_j f_j(t) \le |\mathbf{y}|\,|\mathbf{f}(t)| \qquad (a \le t \le b). \tag{42}$$

پس قضیهٔ ۱۲۰۶ (ب) ایجاب می‌کند که

$$|\mathbf{y}|^2 \le |\mathbf{y}| \int |\mathbf{f}|\, d\alpha. \tag{43}$$

هرگاه $\mathbf{y} = 0$، نامساوی (۴۰) بدیهی است. چنانچه $\mathbf{y} \neq 0$، از تقسیم (۴۳) بر $|\mathbf{y}|$ نامساوی (۴۰) به دست خواهد آمد.

منحنیهای باطول متناهی

این فصل را با مطلبی که از نظر هندسی جالب است پایان می‌بخشیم. این مطلب کاربرد بخشی از نظریهٔ پیش را تدارک خواهد دید. حالت $k = 2$ (یعنی، حالت منحنیهای مسطح) در بررسی توابع تحلیلی یک متغیر مختلط از اهمیت قابل توجهی برخورداراست.

۲۶۰۶ تعریف. نگاشت‌پیوستهٔ γ ازبازهٔ $[a, b]$ بتوی R^k یک **منحنی** در R^k نامیده می‌شود. برای تأکید روی بازهٔ پارامتری $[a, b]$، همچنین می‌توان گفت γ یک منحنی بر $[a, b]$ می‌باشد.

هرگاه γ یک به یک باشد، γ یک **قوس** نام دارد.

چنانچه $\gamma(a) = \gamma(b)$، γ یک **منحنی بسته** خوانده خواهد شد.

باید توجه داشت‌که‌ما هر منحنی را یک **نگاشت** تعریف کردیم نه مجموعه‌ای از نقاط. البته، بـه هـر منحنی مانند γ در R^k زیرمجموعه‌ای از R^k، یعنی برد γ، مربوط می‌شود؛ لکن منحنیهای متفاوت می‌توانند از یک برد برخوردار باشند.

ما به هر افراز $P=\{x_0, \ldots, x_n\}$ از $[a, b]$ و هر منحنی γ بر $[a, b]$ عدد

$$\Lambda(P, \gamma)=\sum_{i=1}^{n} |\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})|$$

را مربوط می‌کنیم. جملهٔ i م در این مجموع فاصلهٔ بین نقاط $\gamma(x_{i-1})$ و $\gamma(x_i)$ (در R^k) می‌باشد. پس $\Lambda(P, \gamma)$ طول یک منحنی چندضلعی با رئوس $\gamma(x_0)$، $\gamma(x_1)$، ...، $\gamma(x_n)$ به همین ترتیب خواهد بود. هر قدر افراز ما ظریفتر شود این چندضلعی به برد γ بیشتر نزدیک می‌شود. این امر تعریف **طول** γ را به صورت

$$\Lambda(\gamma)=\sup \Lambda(P, \gamma),$$

که در آن سوپرمم روی تمام افرازهای $[a, b]$ گرفته می‌شود، توجیه خواهد کرد.

چنانچه $\Lambda(\gamma)<\infty$، می‌گوییم γ **با طول متناهی** است.

در بعضی حالات، $\Lambda(\gamma)$ با یک انتگرال ریمان داده می‌شود. ما این مطلب را برای منحنیهای **به طور پیوسته مشتقپذیر**، یعنی برای منحنیهایی چون γ که γ' پیوسته است، ثابت می‌کنیم.

۲۷۰۶ قضیه. *هرگاه γ' بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه γ با طول متناهی است و*

$$\Lambda(\gamma)=\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

برهان. هرگاه $a \leq x_{i-1}<x_i \leq b$، آنگاه

$$|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})|=\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\, dt\right| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)|\, dt.$$

پس، به ازای هر افراز P از $[a, b]$،

$$\Lambda(P, \gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

در نتیجه،

$$\Lambda(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

برای اثبات این نامساوی در جهت دیگر، فرض می‌کنیم $\varepsilon>0$ را داده باشند. چون γ' بر $[a, b]$ به طور یکنواخت پیوسته است، پس δ ی مثبتی وجود دارد بطوری که اگر $|s-t|<\delta$، $|\gamma'(s)-\gamma'(t)|<\varepsilon$.

فرض کنیم $P=\{x_0, \ldots, x_n\}$ افرازی از $[a, b]$ باشد به این ترتیب که به ازای هر

i ، $\Delta x_i < \delta$. چنانچه $x_{i-1} \le t \le x_i$ ، نتیجه می‌شود که

$$|\gamma'(t)| \le |\gamma'(x_i)| + \varepsilon.$$

پس

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)|\, dt &\le |\gamma'(x_i)|\, \Delta x_i + \varepsilon\, \Delta x_i \\ &= \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(t) + \gamma'(x_i) - \gamma'(t)]\, dt\right| + \varepsilon\, \Delta x_i \\ &\le \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\, dt\right| + \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(x_i) - \gamma'(t)]\, dt\right| + \varepsilon\, \Delta x_i \\ &\le |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| + 2\varepsilon\, \Delta x_i .\end{aligned}$$

اگر این نامساویها را با هم جمع کنیم ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt &\le \Lambda(P, \gamma) + 2\varepsilon(b-a) \\ &\le \Lambda(\gamma) + 2\varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

چون ε دلخواه بود ،

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \le \Lambda(\gamma).$$

این برهان را تمام خواهد کرد .

تمرین

۱ . فرض کنید α بر $[a, b]$ صعودی بوده ، $a \le x_0 \le b$ ، α در x_0 پیوسته باشد ، $f(x_0) = 1$ و ، اگر $x \ne x_0$ ، $f(x) = 0$. ثابت کنید $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ و $\int f\, d\alpha = 0$.

۲ . فرض کنید $f \ge 0$ ، f بر $[a, b]$ پیوسته باشد ، و $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. ثابت کنید به ازای هر $x \in [a, b]$ ، $f(x) = 0$. (قس . تمرین ۱ .)

۳ . سه تابع β_1 ، β_2 ، و β_3 را این طور تعریف کنید : اگر $x < 0$ ، $\beta_j(x) = 0$ ؛ اگر $x > 0$ ، $\beta_j(x) = 1$ $(j = 1, 2, 3)$ ؛ و $\beta_1(0) = 0, \beta_2(0) = 1, \beta_3(0) = \frac{1}{2}$. فرض کنید f یک تابع کراندار بر $[-1, 1]$ باشد .

(آ) ثابت کنید $f \in \mathscr{R}(\beta_1)$ اگر و فقط اگر $f(0+) = f(0)$ ، و در این صورت

$$\int f\, d\beta_1 = f(0).$$

(ب) نتیجهٔ مشابه را برای β_2 بیان و اثبات نمایید .

(پ) ثابت کنید $f \in \mathscr{R}(\beta_3)$ اگر و فقط اگر f در 0 پیوسته باشد .

(ت) هرگاه f در 0 پیوسته باشد ، ثابت کنید

$$\int f\, d\beta_1 = \int f\, d\beta_2 = \int f\, d\beta_3 = f(0).$$

۴ . هرگاه به ازای هر x گنگ $f(x)=0$ و به ازای هر x گویا $f(x)=1$ ، ثابت‌کنید به ازای هر $a<b$، $f \notin \mathscr{R}$ بر $[a, b]$.

۵ . فرض‌کنید f یک تابع حقیقی کراندار بر $[a, b]$ باشد و $f^2 \in \mathscr{R}$ بر $[a, b]$. آیا می‌شود نتیجه‌گرفت‌که $f \in \mathscr{R}$ ؟ آیاجواب مسئله با فرض $f^3 \in \mathscr{R}$ تغییر خواهدکرد ؟

۶ . فرض‌کنید P مجموعهٔ کانتور باشد که در بخش ۴۴۰۲ ساخته شد . f را یک تابع حقیقی و کراندار بر $[0, 1]$ بینگارید که در هر نقطهٔ خارج از P پیوسته است . ثابت کنید $f \in \mathscr{R}$ بر $[0, 1]$. *راهنمایی:* P را می‌توان با تعدادی متناهی قطعه که مجموع طولهایشان را می‌شود به قدر مطلوب کوچک کرد پوشانید . حال مثل قضیهٔ ۶۰۱۰ عمل کنید .

۷ . فرض‌کنید f یک تابع حقیقی بر $(0, 1]$ باشد و، به ازای هر $c>0$ ، $f \in \mathscr{R}$ بر $[c, 1]$. در صورت وجود (و متناهی بودن) حد زیر، تعریف کنید

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{c \to 0} \int_c^1 f(x)\, dx .$$

(آ) هرگاه $f \in \mathscr{R}$ بر $[0, 1]$ ،نشان دهید که این تعریف انتگرال با تعریف‌قدیم مطابقت دارد .

(ب) تابع f را طوری بسازید که حد بالا وجود داشته ولی این حد برای $|f|$ به جای f موجود نباشد .

۸ . فرض‌کنید به ازای هر $b>a$ (که در آن a ثابت است) ، $f \in \mathscr{R}$ بر $[a, b]$. به شرط وجود (و متناهی بودن) حد زیر، تعریف کنید

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx .$$

در این حالت می‌گوییم انتگرال سمت چپ **همگراست** . اگر این انتگرال پس از تعویض f با $|f|$ نیز همگرا باشد، می‌گوییم انتگرال **به طور مطلق همگراست** .

فرض‌کنید $f(x) \geq 0$ بر $[1, \infty)$ ، و f بر این بازه نزولی باشد . ثابت کنید

$$\int_1^\infty f(x)\, dx$$

همگراست اگر و فقط اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

همگرا باشد. (این روش را "آزمون انتگرال" برای همگرایی سریها می‌نامند.)

۹. نشان دهید که انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء را گاهی می‌توان در مورد انتگرالهای "مجازی"، که در تمرینهای ۷ و ۸ تعریف شدند، به کار گرفت. (مفروضات لازم را بیان، قضیه را تنظیم، و آن را اثبات نمایید). به عنوان مثال، نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}\,dx.$$

ثابت کنید یکی از این انتگرالها به **طور مطلق همگرا**ست، اما دیگری چنین نمی‌باشد.

۱۰. فرض کنید p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند بطوری که

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

احکام زیر را ثابت کنید:

(آ) هرگاه $u \ge 0$ و $v \ge 0$، آنگاه

$$uv \le \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}.$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $u^p = v^q$.

(ب) هرگاه $f \in \mathscr{R}(\alpha)$، $g \in \mathscr{R}(\alpha)$، $f \ge 0$، $g \ge 0$، و

$$\int_a^b f^p\,d\alpha = 1 = \int_a^b g^q\,d\alpha,$$

آنگاه

$$\int_a^b fg\,d\alpha \le 1.$$

(پ) هرگاه f و g توابع مختلطی در $\mathscr{R}(\alpha)$ باشند، آنگاه

$$\left|\int_a^b fg\,d\alpha\right| \le \left\{\int_a^b |f|^p\,d\alpha\right\}^{1/p}\left\{\int_a^b |g|^q\,d\alpha\right\}^{1/q}.$$

این را **نامساوی هولدر**[1] می‌نامند. معمولاً وقتی $p=q=2$، آن را نامساوی شوارتز می‌خوانند. (توجه کنید که قضیهٔ ۳۵۰۱ حالت بسیار خاصی از این است.)

(ت) نشان دهید که نامساوی هولدر برای انتگرالهای "مجازی"، که در تمرینهای ۷ و ۸ وصف شدند، نیز برقرار است.

۱۱. فرض کنید α تابع صعودی ثابتی بر $[a, b]$ باشد. به ازای $u \in \mathscr{R}(\alpha)$ تعریف کنید

$$\|u\|_2 = \left\{\int_a^b |u|^2\,d\alpha\right\}^{1/2}.$$

---

1. Holder

فرض کنید $f, g, h \in \mathscr{R}(\alpha)$. مثل برهان قضیهٔ ۶.۳۷۰، نامساوی مثلثی

$$\|f-h\|_2 \le \|f-g\|_2 + \|g-h\|_2$$

را به عنوان نتیجه‌ای از نامساوی شوارتز ثابت نمایید.

۱۲ . با نمادهای تمرین ۱۱، فرض کنید $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ و $\varepsilon > 0$. ثابت کنید تابع پیوسته‌ای چون g بر $[a, b]$ هست بطوری که $\|f-g\|_2 < \varepsilon$. **راهنمایی:** فرض کنید $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ افراز مناسبی از $[a, b]$ باشد و، اگر $x_{i-1} \le t \le x_i$ ، تعریف کنید

$$g(t) = \frac{x_i - t}{\Delta x_i} f(x_{i-1}) + \frac{t - x_{i-1}}{\Delta x_i} f(x_i) .$$

۱۳ . تعریف کنید

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2)\, dt .$$

(آ) ثابت کنید که اگر $x > 0$ ، $|f(x)| < 1/x$. **راهنمایی:** قرار دهید $t^2 = u$ و، با انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء، نشان دهید که $f(x)$ مساوی

$$\frac{\cos(x^2)}{2x} - \frac{\cos[(x+1)^2]}{2(x+1)} - \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{4u^{3/2}}\, du$$

است. حال $\cos u$ را با -1 عوض نمایید.

(ب) ثابت کنید

$$2xf(x) = \cos(x^2) - \cos[(x+1)^2] + r(x)$$

که در آن $|r(x)| < c/x$ و c عدد ثابتی است.

(پ) حدود بالایی و پایینی $xf(x)$ را وقتی $x \to \infty$ بیابید.

(ت) آیا $\int_0^\infty \sin(t^2)\, dt$ همگراست؟

۱۴ . همین توجه را به

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(e^t)\, dt$$

بنمایید: نشان دهید که

$$e^x |f(x)| < 2,$$

و

$$e^x f(x) = \cos(e^x) - e^{-1}\cos(e^{x+1}) + r(x)$$

که در آن، به ازای ثابتی چون C ، $|r(x)| < Ce^{-x}$.

۱۵ . فرض کنید f یک تابع حقیقی و به طور پیوسته مشتقپذیر بر $[a, b]$ باشد،

$f(a)=f(b)=0$ ، و

$$\int_a^b f^2(x)\,dx=1.$$

ثابت کنید

$$\int_a^b xf(x)f'(x)\,dx=-\tfrac{1}{2}$$

و

$$\int_a^b [f'(x)]^2\,dx\cdot\int_a^b x^2f^2(x)\,dx>\tfrac{1}{4}.$$

۱۶ . به ازای $1<s<\infty$ تعریف کنید

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

(این تابع زتای ریمان است که در بررسی توزیع اعداد اول اهمیت زیادی دارد .)
ثابت کنید

(آ) $$\zeta(s)=s\int_1^{\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}\,dx$$

و

(ب) $$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\int_1^{\infty}\frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx ،$$

که در آنها $[x]$ بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x است .
ثابت کنید انتگرال مذکور در (ب) به ازای هر $s>0$ همگراست .
راهنمایی : برای اثبات (آ) ، تفاوت بین انتگرال روی $[1, N]$ و مجموع جزئی N م سری هرف $\zeta(s)$ را حساب کنید .

۱۷ . فرض کنید α بر $[a, b]$ صعود کند ، g پیوسته باشد و ، به ازای $a\le x\le b$ ، $g(x)=G'(x)$. ثابت کنید

$$\int_a^b \alpha(x)g(x)\,dx=G(b)\alpha(b)-G(a)\alpha(a)-\int_a^b G\,d\alpha.$$

راهنمایی : بی‌آنکه بـه کلیت خـللی وارد شود می‌توان g را حقیقی گرفت . هرگاه $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ مفروض بـاشد ، $t_i\in(x_{i-1}, x_i)$ را قسمی اختیار کنید که $g(t_i)\,\Delta x_i=G(x_i)-G(x_{i-1})$. نشان دهید که

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha(x_i)g(t_i)\,\Delta x_i=G(b)\alpha(b)-G(a)\alpha(a)-\sum_{i=1}^{n}G(x_{i-1})\,\Delta\alpha_i .$$

۱۸ . فرض کنید γ_1 ، γ_2 ، و γ_3 منحنیهایی در صفحهٔ مختلط باشند که بر $[0, 2\pi]$ با

$$\gamma_1(t)=e^{it},\qquad \gamma_2(t)=e^{2it},\qquad \gamma_3(t)=e^{2\pi it\sin(1/t)}$$

تعریف شده‌اند. نشان دهید که این سه منحنی یک برد دارند، γ_1 و γ_2 با طول متناهی‌اند، طول γ_1 مساوی 2π است، γ_2 از طول 4π برخوردار است، و γ_3 با طول متناهی نمی‌باشد.

۱۹. فرض کنید γ_1 یک منحنی در R^k باشد که بر $[a, b]$ تعریف شده است؛ ϕ نگاشت یک به یک پیوسته‌ای از $[c, d]$ بروی $[a, b]$ باشد که $\phi(c)=a$؛ و تعریف کنید $\gamma_2(s)=\gamma_1(\phi(s))$. ثابت کنید γ_2 یک قوس، یک منحنی بسته، یا یک منحنی با طول متناهی است اگر و فقط اگر همین مطلب برای γ_1 درست باشد. ثابت کنید γ_1 و γ_2 از یک طول برخوردارند.

۷
دنباله‌ها وسریهای توابع

در فصل حاضر نظر خود را معطوف توابع مختلط (البته، به انضمام تابعهای حقیقی) می‌کنیم. با آنکه بسیاری از قضایا و برهانهای زیر بدون اشکال به توابع برداری، و حتی نگاشتهای بتوی فضاهای متری کلی، قابل تعمیم‌اند، ماهمین چهار چوب ساده را برمی‌گزینیم تا نظر خود را بر مهمترین جنبه‌های مسائلی که حین تعویض اعمال حدگیری ظاهر می‌شوند متمرکز سازیم.

بحث دربارهٔ مسئلهٔ اصلی

۱۰۷ تعریف. فرض‌کنیم $\{f_n\},\ n = 1, 2, 3, \ldots$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر مجموعهٔ E تعریف شده‌اند، و دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ از اعداد را به ازای هر $x \in E$ همگرا می‌گیریم. در این صورت، می‌توانیم تابع f را با

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E) \tag{1}$$

تعریف کنیم.

در این شرایط می‌گوییم $\{f_n\}$ بر E همگراست، و f حد یا **تابع حدی** $\{f_n\}$ می‌باشد. گاهی اصطلاح توصیفی‌تری به‌کار برده خواهیم گفت "$\{f_n\}$ بر E به f **نقطه به نقطه همگراست**" اگر که (۱) برقرار باشد. بهمین نحو، اگر $\sum f_n(x)$ به ازای هر $x \in E$ همگرا باشد و f را این طور تعریف کنیم

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E)\ . \tag{2}$$

تابع f مجموع سری Σf_n نام خواهد داشت.

مسئلهٔ اصلی آن است که معین شود آیا خواص مهم توابع تحت اعمال حدی (۱) و (۲) حفظ می‌شوند یا نه. به عنوان مثال، اگر توابع f_n پیوسته یا مشتقپذیر و یا انتگرال‌پذیر باشند، آیا همین خاصیت را تابع حدی هم دارد؟ یا، مثلاً، چه رابطه‌هایی بین f'_n و f'، و یا بین انتگرالهای f_n و f، وجود دارند؟

وقتی می‌گوییم f در x پیوسته است یعنی که

$$\lim_{t\to x} f(t) = f(x)\cdot$$

پس، اینکه سؤال شود آیا حد دنباله‌ای از توابع پیوسته پیوسته است مثل آن است که بپرسیم آیا

$$\lim_{t\to x}\ \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\ \lim_{t\to x} f_n(t) \tag{3}$$

برقرار است؛ یعنی، آیا ترتیب انجام اعمال حدی بالااهمیتی ندارد. در سمت چپ (۳)، اول فرض می‌کنیم $n\to\infty$ و بعد $t\to x$؛ در طرف راست آن، ابتدا $t\to x$ وبعد $n\to\infty$.

حال با چند مثال نشان می‌دهیم که تعویض اعمال حدی نمی‌تواند در حالت کلی بی تأثیر باشد. پس از آن ثابت می‌کنیم که، تحت شرایطی معین، ترتیب اعمال حدی بی اهمیت خواهد بود.

اولین مثال ما، که ساده‌تر از همه است، راجع به یک "دنبالهٔ مضاعف" می‌باشد.

۲۰۷ مثال. به ازای $m = 1, 2, 3, \ldots$ و $n = 1, 2, 3, \ldots$ قرار می‌دهیم

$$s_{m,n} = \frac{m}{m+n}\cdot$$

در این صورت، به ازای هر n ثابت،

$$\lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1\cdot$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\ \lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1. \tag{4}$$

از سوی دیگر، به ازای هر m ثابت،

$$\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0\ .$$

پس

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0\,. \tag{5}$$

۳۰۷ مثال . فرض می‌کنیم

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \qquad (\,n = 0, 1, 2, \ldots$$ ،(x حقیقی است و

و توجه می‌کنیم که

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,. \tag{6}$$

چون $f_n(0) = 0$ ، داریم $f(0) = 0$. به‌ازای $x \neq 0$ ، آخرین سری در (۶) یک سری هندسی همگرا با مجموع $1 + x^2$ است (قضیهٔ ۲۶۰۳) . در نتیجه ،

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0)\,, \\ 1 + x^2 & (x \neq 0)\,. \end{cases} \tag{7}$$

پس یک سری همگرا از توابع پیوسته می‌تواند مجموع ناپیوسته داشته باشد .

۴۰۷ مثال . به ازای $m = 1, 2, 3, \ldots$ قرار می‌دهیم

$$f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}\,.$$

وقتی $m!x$ صحیح باشد ، $f_m(x) = 1$. به ازای مقادیر دیگر x ، $f_m(x) = 0$. حال قرار می‌دهیم

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)\,.$$

اگر x گنگ باشد ، به ازای هر m ، $f_m(x) = 0$. لذا $f(x) = 0$. به ازای x گویا ، مثلا" به شکل $x = p/q$ که در آن p و q صحیح‌اند ، می‌بینیم که اگر $m \geq q$ ، $m!x$ صحیح است . درنتیجه ، $f(x) = 1$. از اینرو ،

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n} = \begin{cases} 0 & (\text{گنگ } x)\,, \\ 1 & (\text{گویا } x)\,. \end{cases} \tag{8}$$

پس یک تابع حدی همه جا ناپیوسته به دست آورده‌ایم که انتگرال ریمان ندارد (ر.ک. تمرین ۴ ، فصل ۶) .

۵۰۷ **مثال .** فرض کنیم

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \qquad (x \text{ حقیقی است و } n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

و

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 .$$

در این صورت، $f'(x) = 0$ و

$$f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx .$$

پس $\{f_n'\}$ همگرا به f' نیست. مثلاً، وقتی $n \to \infty$،

$$f_n'(0) = \sqrt{n} \to +\infty ,$$

حال آنکه $f'(0) = 0$.

۶۰۷ **مثال .** فرض کنیم

$$f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n \qquad (0 \le x \le 1, n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{10}$$

بنابر قضیهٔ ۲۰۰۳ (ت)، به ازای $0 < x \le 1$ داریم

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

چون $f_n(0) = 0$، خواهیم دید که

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 \le x \le 1). \tag{11}$$

محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که

$$\int_0^1 x(1 - x^2)^n \, dx = \frac{1}{2n + 2} .$$

لذا، با وجود (۱۱)، وقتی $n \to \infty$،

$$\int_0^1 f_n(x) \, dx = \frac{n^2}{2n + 2} \to +\infty .$$

اگر در (۱۰) n^2 را با n عوض کنیم، (۱۱) باز هم برقرار است، ولی در این حالت داریم

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n + 2} = \frac{1}{2} ,$$

حال آنکه

$$\int_0^1 \left[\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right] dx = 0 .$$

لذا، حد انتگرال لزوماً مساوی انتگرال حد نیست، حتی اگر هر دو نیز متناهی باشند

پس از این مثالها، که مشکلات ناشی از بی‌دقتی در تعویض اعمال حدی را نشان می‌دهند، به تعریف نوع جدیدی از همگرایی که ازهمگرایی نقطه به نقطهٔ مذکور درتعریف

۱۰۷ قویتر است می‌پردازیم . این همگرایی ما را به چند نتیجهٔ قطعی خواهد رسانید .

همگرایی یکنواخت

۷۰۷ **تعریف .** گوییم دنباله‌ای از توابع مانند $\{f_n\}$ ، $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، بر E به طور **یکنواخت** به تابع f همگراست‌هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N باشد بطوری که $n \geq N$ نامساوی

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \tag{12}$$

را به ازای هر $x \in E$ ایجاب کند .

واضح است که هر دنبالهٔ به طور یکنواخت همگرا نقطه به نقطه همگراست . فرق این دو مفهوم صریحا" بدین شرح است : هرگاه $\{f_n\}$ بر E نقطه به نقطه همگرا باشد ، آنگاه تابعی چون f هست که به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر $x \in E$ عدد صحیحی مانند N ، وابسته به ε و x ، وجود دارد بطوری که (۱۲) به ازای $n \geq N$ برقرار است ؛ چنانچه $\{f_n\}$ بر E به طور یکنواخت همگرا باشد ، می‌توان به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح N را یافت که برای هر $x \in E$ کارساز باشد .

می‌گوییم سری $\Sigma f_n(x)$ بر E به طور یکنواخت همگراست هرگاه دنبالهٔ $\{s_n\}$ از مجموعهای جزئی که با

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = s_n(x)$$

تعریف می‌شوند بر E به طور یکنواخت همگرا باشد .

محک کشی برای همگرایی یکنواخت بدین قرار است .

۸۰۷ **قضیه .** *دنباله‌ای از توابع مانند $\{f_n\}$ تعریف شده بر E به طور یکنواخت بر E همگرا است اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N باشد بطوری که $m \geq N$ ، $n \geq N$ و $x \in E$ نامساوی*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \tag{13}$$

را ایجاب کنند .

برهان . فرض کنیم $\{f_n\}$ بر E به طور یکنواخت همگرا و f تابع حدی آن باشد . در

این صورت، عدد صحیحی مانند N هست بطوری که $n \geq N$ و $x \in E$ نامساوی

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

را ایجاب می‌کنند. پس، اگر $n \geq N$، $m \geq N$ و $x \in E$،

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

بعکس، فرض‌کنیم شرط کشی برقرار باشد. بنابر قضیهٔ ۱۱۰۳، دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ به ازای هر x به حدی که آن را $f(x)$ می‌نامیم همگراست. پس دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر E به f همگرا خواهد بود. باید ثابت کنیم که همگرایی یکنواخت است.

فرض‌کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، و N را قسمی می‌گیریم که (۱۳) برقرار شود. در (۱۳) n را ثابت گرفته m را به ∞ میل می‌دهیم. چون وقتی که $m \to \infty$، $f_m(x) \to f(x)$، نتیجه می‌شود که به ازای هر $n \geq N$ و هر $x \in E$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \tag{14}$$

و برهان تمام خواهد شد.

محک زیر گاهی اوقات مفید واقع می‌شود.

۹۰۷ قضیه. فرض‌کنیم

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (x \in E).$$

قرار می‌دهیم

$$M_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

دراین صورت، $f_n \to f$ به طور یکنواخت بر E اگر و فقط اگر وقتی $n \to \infty$، $M_n \to 0$.

چون این قضیه نتیجهٔ مستقیم تعریف ۷۰۷ است، برهانش را حذف می‌کنیم.

در مورد سریها، آزمون بسیار مناسبی برای همگرایی یکنواخت وجود دارد که به وایراشتراس منسوب است.

۱۰۰۷ قضیه. فرض‌کنیم $\{f_n\}$ *دنباله‌ای از توابع باشد که بر E تعریف شده‌اند، و گیریم که*

$$|f_n(x)| \le M_n \qquad (x \in E, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

در این صورت، اگر ΣM_n همگرا باشد، Σf_n بر E به طور یکنواخت همگراست.

توجه کنید که عکس قضیهٔ فوق ادعا نشده است (و، درواقع، درست هم نیست).

برهان. هرگاه ΣM_n همگرا باشد، آنگاه به ازای $\varepsilon > 0$ دلخواه

$$\left|\sum_{i=n}^{m} f_i(x)\right| \le \sum_{i=n}^{m} M_i \le \varepsilon \qquad (x \in E),$$

مشروط براینکه m و n به قدر کافی بزرگ باشند. حال همگرایی یکنواخت از قضیهٔ ۸۰۷ نتیجه می‌شود.

همگرایی یکنواخت و پیوستگی

۱۱۰۷ قضیه. فرض کنیم در یک فضای متری $f_n \to f$ به طور یکنواخت بر مجموعهٔ E. x را یک نقطهٔ حدی E می‌انگاریم و فرض می‌کنیم

$$\lim_{t \to x} f_n(t) = A_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{15}$$

در این صورت، $\{A_n\}$ همگراست و

$$\lim_{t \to x} f(t) = \lim_{n \to \infty} A_n. \tag{16}$$

به عبارت دیگر، نتیجه این است که

$$\lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} f_n(t). \tag{17}$$

برهان. فرض‌کنیم $\varepsilon > 0$ را داده‌باشند. بنابرهمگرایی یکنواخت $\{f_n\}$، عدد صحیحی مانند N هست بطوری که $n \ge N$، $m \ge N$، و $t \in E$ ایجاب می‌کنند که

$$|f_n(t) - f_m(t)| \le \varepsilon. \tag{18}$$

با فرض $t \to x$ در (۱۸)، به ازای $n \ge N$ و $m \ge N$ خواهیم داشت

$$|A_n - A_m| \le \varepsilon.$$

پس $\{A_n\}$ یک دنبالهٔ کشی است؛ و درنتیجه، همگرا (مثلاً، به A) می‌باشد.

دیگر اینکه،

$$|f(t)-A| \le |f(t)-f_n(t)| + |f_n(t)-A_n| + |A_n - A|. \tag{19}$$

ابتدا n را طوری می‌گیریم که به ازای هر $t \in E$

$$|f(t)-f_n(t)| \le \frac{\varepsilon}{3} \tag{20}$$

(این بخاطر همگرایی یکنواخت میسر است)، و نیز

$$|A_n - A| \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{21}$$

بعد، به ازای این n ، همسایگی V از x را قسمی اختیار می‌کنیم که اگر $t \in V \cap E$ و $t \ne x$ ، داشته باشیم

$$|f_n(t) - A_n| \le \frac{\varepsilon}{3} \cdot \tag{22}$$

با گذاردن نامساویهای (۲۰) تا (۲۲) در (۱۹) خواهیم دید که، با شرط $t \in V \cap E$ و $t \ne x$ ، $|f(t)-A| \le \varepsilon$.
این با (۱۶) هادل خواهد بود.

۱۲۰۷ قضیه. هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته بر E باشد و $f_n \to f$ به طور یکنواخت بر E ، آنگاه f بر E پیوسته خواهد بود.

این قضیهٔ بسیار مهم نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ ۱۱۰۷ است..

عکس این مطلب درست نیست؛ یعنی، ممکن است دنباله‌ای از توابع پیوسته، در عین همگرای یکنواخت نبودن، به تابع پیوسته‌ای همگرا بشود. مثال ۶۰۷ از این قماش است (برای اثبات آن، قضیهٔ ۹۰۷ را به کار برید). اما حالتی وجود دارد که در آن می‌توان به عکس قضیهٔ بالا حکم داد.

۱۳۰۷ قضیه. فرض کنیم K فشرده باشد، و

(آ) $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته بر K باشد؛

(ب) $\{f_n\}$ نقطه به نقطه به تابع پیوسته‌ای چون f بر K همگرا باشد؛

(پ) به ازای هر $x \in K$ و $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، $f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$ ،

در این صورت، $f_n \to f$ به طور یکنواخت بر K .

برهان. قرار می‌دهیم $g_n = f_n - f$. پس g_n پیوسته است، $g_n \to 0$ نقطه به نقطه، و $g_n \geq g_{n+1}$. باید ثابت کنیم $g_n \to 0$ به طور یکنواخت بر K.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. K_n را مجموعهٔ تمام x هایی در K می‌انگاریم که $g_n(x) \geq \varepsilon$. چون g_n پیوسته است، K_n بسته‌می‌باشد (قضیهٔ ۸۰۴)؛ در نتیجه، فشرده‌خواهد بود (قضیهٔ ۳۵۰۲). وچون $g_n \geq g_{n+1}$ ، داریم $K_n \supset K_{n+1}$. $x \in K$ را ثابت می‌گیریم. از آنجا که $g_n(x) \to 0$ ، ملاحظه می‌کنیم که اگر n به قدر کافی بزرگ باشد، $x \notin K_n$. لذا، $x \notin \bigcap K_n$. به عبارت دیگر، $\bigcap K_n$ تهی است. پس به ازای N ی K_N تهی خواهد بود (قضیهٔ ۳۶۰۲). از این نتیجه می‌شود که برای هر $x \in K$ و هر $n \geq N$ ، $0 \leq g_n(x) < \varepsilon$. این قضیه را ثابت می‌کند.

توجه می‌دهیم که در اینجا فشردگی واقعاً لازم است. مثلاً، هرگاه

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1} \qquad (0 < x < 1;\, n = 1, 2, 3, \ldots),$$

آنگاه $f_n(x) \to 0$ به طور یکنوا در $(0, 1)$ ، اما همگرایی یکنواخت نخواهد بود.

۱۴۰۷ تعریف. هرگاه X یک فضای متری باشد، $\mathscr{C}(X)$ مجموعهٔ تمام توابع مختلط، پیوسته، و کراندار با قلمرو X خواهد بود.

[توجه کنید که در حالت فشردگی X ، کراندار بودن زائد است (قضیهٔ ۱۵۰۴). لذا، اگر X فشرده باشد، $\mathscr{C}(X)$ از جمیع توابع مختلط پیوسته بر X تشکیل خواهد شد.]

به هر $f \in \mathscr{C}(X)$ **نرم سوپرمم** آن، یعنی

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

را مربوط می‌کنیم. چون f کراندار فرض شده، پس $\|f\| < \infty$. واضح است که $\|f\| = 0$ فقط اگر که به ازای هر $x \in X$ ، $f(x) = 0$ ؛ یعنی، فقط اگر که $f = 0$.
هرگاه $h = f + g$، آنگاه به ازای هر $x \in X$ ،

$$|h(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|.$$

پس

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

چنانچه فاصلهٔ بین $f \in \mathscr{C}(X)$ و $g \in \mathscr{C}(X)$ مساوی $\|f-g\|$ تعریف شود، نتیجه خواهد شد که اصول موضوع ۱۵۰۲ برای یک متر برقرارند.

بنابراین، $\mathscr{C}(X)$ را به یک فضای متری بدل کرده‌ایم.

قضیهٔ ۹۰۷ را می‌توانیم این طور هم بگوییم:

دنبالهٔ $\{f_n\}$ نسبت به‌متر $\mathscr{C}(X)$ همگرا به f است اگر و فقط اگر $f_n \to f$ به طور یکنواخت بر X.

از اینروست که‌گاهی زیر مجموعه‌های بستهٔ $\mathscr{C}(X)$ را **به طوریکنواخت بسته**، و بست هر مجموعه مانند $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}(X)$ را **بست یکنواخت** آن می‌نامند، و مانند اینها.

۱۵۰۷ قضیه. متر مذکور در بالا $\mathscr{C}(X)$ را به یک فضای متری تام بدل می‌کند.

برهان. فرض کنیم $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در $\mathscr{C}(X)$ باشد. این یعنی به هر $\varepsilon > 0$ عددی صحیح مانند N نظیر است بنحوی که اگر $n \ge N$ و $m \ge N$، $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$.

پس (بنابر قضیهٔ ۸۰۷) تابعی مانند f با قلمرو X هست که $\{f_n\}$ به آن به طور یکنواخت همگرا ست. بنابر قضیهٔ ۱۲۰۷، f پیوسته می‌باشد. بعلاوه، f کراندار است، چراکه n ی هست بطوری که به ازای هر $x \in X$، $|f(x) - f_n(x)| < 1$، و f_n کراندار می‌باشد.

بنابراین، $f \in \mathscr{C}(X)$، و چون $f_n \to f$ به طور یکنواخت بر X، پس‌وقتی $n \to \infty$، $\|f - f_n\| \to 0$.

همگرایی یکنواخت وانتگرالگیری

۱۶۰۷ قضیه. فرض کنیم α بر $[a, b]$ صعودی باشد. همچنین، به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$، $f_n \in \mathscr{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$، و $f_n \to f$ به‌طوریکنواخت‌بر $[a, b]$.

در این صورت، $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ و

$$\int_a^b f\,d\alpha = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n\,d\alpha. \tag{23}$$

(وجود حد بخشی از نتیجه است).

برهان. کافی است قضیه برای f_n های حقیقی ثابت شود. قرار می‌دهیم

$$\varepsilon_n = \sup |f_n(x) - f(x)|, \tag{24}$$

که در آن سوپرمم روی $a \le x \le b$ گرفته شده است. پس

$$f_n - \varepsilon_n \le f \le f_n + \varepsilon_n.$$

در نتیجه، انتگرالهای بالایی و پایینی f (ر.ک. تعریف ۲۰۶) در نامساویهای

$$\int_a^b (f_n - \varepsilon_n)\, d\alpha \le \underline{\int} f\, d\alpha \le \overline{\int} f\, d\alpha \le \int_a^b (f_n + \varepsilon_n)\, d\alpha \tag{25}$$

صدق می‌کنند. لذا،

$$0 \le \overline{\int} f\, d\alpha - \underline{\int} f\, d\alpha \le 2\varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

چون وقتی $n \to \infty$ ، $\varepsilon_n \to 0$ (قضیهٔ ۹۰۷)، پس انتگرالهای بالایی و پایینی f برابر می‌باشند.

بنابراین، $f \in \mathscr{R}(\alpha)$. اینک کاربرد دیگر (۲۵) نتیجه می‌دهد که

$$\left| \int_a^b f\, d\alpha - \int_a^b f_n\, d\alpha \right| \le \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)]. \tag{26}$$

این (۲۳) را ایجاب خواهد کرد.

نتیجه. هرگاه $f_n \in \mathscr{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ ،

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (a \le x \le b),$$

و سری بر $[a, b]$ به طور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه

$$\int_a^b f\, d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\, d\alpha.$$

به عبارت دیگر، از سری می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت.

همگرایی یکنواخت و مشتقگیری

قبلاً، در مثال ۵۰۷، دیدیم که از همگرایی یکنواخت $\{f_n\}$ چیزی برای دنبالهٔ $\{f_n'\}$ حاصل نمی‌شود. ازاینرو، حکم "اگر $f_n \to f$ ، $f_n' \to f'$ " به فرضهای قویتری نیاز خواهد داشت.

۱۷۰۷ قضیه. *فرض کنیم $\{f_n\}$ چنان دنباله‌ای از توابع باشد که بر $[a, b]$ مشتقپذیر اند، و به ازای نقطه‌ای چون x_0 در $[a, b]$ ، $\{f_n(x_0)\}$ همگرا است. هرگاه*

$\{f'_n\}$ بر $[a, b]$ به طور یکنواخت همگرا باشد، $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ به طور یکنواخت به تابعی چون f همگراست و

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \qquad (a \le x \le b). \tag{27}$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند. N را قسمی اختیار می‌کنیم که $n \ge N$ و $m \ge N$ نامساویهای

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{28}$$

و

$$|f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (a \le t \le b) \tag{29}$$

را ایجاب کنند.

چنانچه قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۵·۱۹) را برای تابع $f_n - f_m$ به کار بریم، (۲۹) نشان خواهد داد که به‌ازای هر x و هر t در $[a, b]$، درصورتی که $n \ge N$ و $m \ge N$،

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \le \frac{|x-t|\varepsilon}{2(b-a)} \le \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{30}$$

نامساوی

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|\,,$$

به کمک (۲۸) و (۳۰)، ایجاب می‌کند که

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad (a \le x \le b, n \ge N, m \ge N).$$

پس $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ به طور یکنواخت همگراست. قرار می‌دهیم

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (a \le x \le b).$$

حال نقطهٔ x را در $[a, b]$ ثابت می‌گیریم و، به‌ازای $a \le t \le b$ که $t \ne x$، تعریف می‌کنیم

$$\phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \qquad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}\,. \tag{31}$$

در این صورت،

$$\lim_{t\to x} \phi_n(t) = f'_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{32}$$

اولین نامساوی در (۳۰) نشان می‌دهد که

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (n \ge N, m \ge N).$$

پس $\{\phi_n\}$ به ازای $t \neq x$ به طور یکنواخت همگراست. چون $\{f_n\}$ همگرا به f است، ز (۳۱) نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t) \tag{33}$$

به طور یکنواخت به ازای $a \le t \le b$ که $t \neq x$.

حال اگر قضیهٔ ۱۱۰۷ را در مورد $\{\phi_n\}$ به کار بریم، (۳۲) و (۳۳) نشان خواهند داد که

$$\lim_{t\to x} \phi(t) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \ ;$$

و این، بنابر تعریف $\phi(t)$، همان (۲۷) می‌باشد.

تبصره. هرگاه، علاوه بر مفروضات فوق، پیوستگی f_n' ها نیز اضافه شود، می‌توان، برپایهٔ قضیهٔ ۱۶۰۷ و قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، به برهان بسیار کوتاهتری از (۲۷) دست یافت.

۱۸۰۷ قضیه. *تابعی حقیقی و پیوسته بر خط حقیقی هست که در هیچ نقطه مشتقپذیر نیست.*

برهان. تعریف می‌کنیم

$$\varphi(x) = |x| \qquad (-1 \le x \le 1) \tag{34}$$

و، با قرار

$$\varphi(x+2) = \varphi(x), \tag{35}$$

تعریف $\varphi(x)$ را به تمام x های حقیقی تعمیم می‌دهیم. در این صورت، به ازای هر s و t، داریم

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \le |s - t|. \tag{36}$$

بخصوص، φ بر R^1 پیوسته می‌باشد. تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x). \tag{37}$$

چون $0 \le \varphi \le 1$، قضیهٔ ۱۰۰۷ نشان می‌دهد که سری (۳۷) بر R^1 به طور یکنواخت همگرا

است. بنابر قضیهٔ ۱۲۰۷، f بر R^1 پیوسته خواهد بود.

حال عدد حقیقی x و عدد صحیح و مثبت m را ثابت می‌گیریم. قرار می‌دهیم

$$\delta_m = \pm \tfrac{1}{2}\cdot 4^{-m} \tag{38}$$

که در آن علامت طوری اختیار می‌شود که هیچ عدد صحیحی بین $4^m x$ و $4^m(x+\delta_m)$ قرار نگیرد. این عمل، به این دلیل که $4^m|\delta_m| = \frac{1}{2}$ ، میسر است. تعریف می‌کنیم

$$\gamma_n = \frac{\varphi(4^n(x+\delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}. \tag{39}$$

وقتی $n > m$ ، $4^n\delta_m$ زوج است؛ پس $\gamma_n = 0$. زمانی که $0 \le n \le m$ ، (۳۶) ایجاب می‌کند که $|\gamma_n| \le 4^n$.

چون $|\gamma_m| = 4^m$ ، نتیجه خواهیم گرفت که

$$\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| = \left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right|$$

$$\ge 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n$$

$$= \tfrac{1}{2}(3^m + 1).$$

وقتی $m \to \infty$ ، $\delta_m \to 0$. پس f در x مشتقپذیر نخواهد بود.

خانواده‌های همپیوسته از توابع

در قضیهٔ ۶۰۳ دیدیم که هر دنبالهٔ کراندار از اعداد مختلط شامل زیردنباله‌ای همگراست، و این سؤال مطرح می‌شود که آیا برای دنباله‌های توابع نیز چیزی شبیه به این درست است یا خیر. برای دقیقتر شدن سؤال، دونوع کراندار بودن را تعریف می‌کنیم.

۱۹۰۷ تعریف. فرض‌کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر مجموعهٔ E تعریف شده‌اند.

می‌گوییم $\{f_n\}$ بر E *نقطه به نقطه کراندار* است هرگاه دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ به ازای هر $x \in E$ کراندار باشد؛ یعنی، تابعی با مقادیر متناهی چون ϕ ، که بر E تعریف شده، باشد بطوری که

$$|f_n(x)| < \phi(x) \qquad (x \in E, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

می‌گوییم $\{f_n\}$ بر E *به طور یکنواخت کراندار* است هرگاه عددی مانند M باشد بطوری که

$$|f_n(x)| < M \qquad (x \in E, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

حال اگر $\{f_n\}$ بر E نقطه به نقطه کراندار بوده و E_1 زیرمجموعهٔ شمارشپذیری از E باشد، همیشه می‌توان زیردنبالهٔ $\{f_{n_k}\}$ را قسمی یافت که $\{f_{n_k}(x)\}$ به ازای هر $x \in E_1$ همگرا باشد. این را می‌شود با فرایند قطری، که در برهان قضیهٔ ۲۳۰۷ به کار رفت، صورت داد.

بااینحال، حتی اگر $\{f_n\}$ دنبالهٔ به طور یکنواخت کرانداری از توابع پیوسته بر مجموعهٔ فشرده E هم باشد، باز لازم نیست زیردنباله‌ای از آن که بر E نقطه به نقطه همگراست وجود داشته باشد. در مثال زیر، اثبات این مطلب با وسایلی که تاکنون در اختیار ما قرار گرفته کار پرمصیبتی است، لکن این اثبات با توسل به قضیه‌ای از فصل ۱۱ کاملاً ساده خواهد بود.

۲۰۰۷ مثال. گیریم

$$f_n(x) = \sin nx \qquad (0 \le x \le 2\pi, n = 1, 2, 3, \ldots),$$

و فرض می‌کنیم دنباله‌ای مانند $\{n_k\}$ باشد بطوری که به ازای هر $x \in [0, 2\pi]$ $\{\sin n_k x\}$ همگرا باشد. در آن صورت باید داشته باشیم

$$\lim_{k\to\infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x) = 0 \qquad (0 \le x \le 2\pi).$$

پس

$$\lim_{k\to\infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0 \qquad (0 \le x \le 2\pi). \tag{40}$$

بنابر قضیهٔ لبگ مربوط به‌انتگرالگیری‌از دنباله‌های به طورکراندار همگرا (قضیهٔ ۳۲۰۱۱)، رابطهٔ (۴۰) ایجاب می‌کند که

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 \, dx = 0. \tag{41}$$

اما محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که

$$\int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 \, dx = 2\pi,$$

که ناقض (۴۱) می‌باشد.

سؤال دیگر آن است که آیا هر دنبالهٔ همگرا شامل زیردنباله‌ای به طور یکنواخت

همگرا هست یا نه. مثال بعدی ما نشان می‌دهد که الزاما" این طور نیست حتی اگر دنباله بر مجموعه‌ای فشرده به‌طور یکنواخت کراندار باشد. (مثال ۶۰۷ نشان می‌دهد که یک دنباله از توابع کراندار می‌تواند بدون آنکه به طور یکنواخت کراندار باشد همگرا باشد. اما بوضوح دیده می‌شود که همگرایی یکنواخت دنباله‌ای از توابع کراندار کرانداری یکنواخت آن را ایجاب خواهد کرد.)

۲۱۰۷ مثال. فرض می‌کنیم

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2} \qquad (0 \leq x \leq 1, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

در این صورت، $|f_n(x)| \leq 1$. پس $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت کراندار است. همچنین،

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 \leq x \leq 1),$$

ولی

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

در نتیجه، هیچ زیردنباله‌ای نمی‌تواند بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگرا شود.

مفهومی که در این رابطه مورد نیاز است همپیوستگی است، که در تعریف زیر داده می‌شود.

۲۲۰۷ تعریف. خانوادهٔ $\mathscr{F}$ از توابع مختلط مانند f را که بر مجموعهٔ E در فضای متری X تعریف شده‌اند بر E **همپیوسته** خوانند هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، δ ی مثبتی باشد بطوری که هر وقت $d(x, y) < \delta$، $x \in E$، $y \in E$، و $f \in \mathscr{F}$، داشته باشیم

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

در اینجا d نشان دهندهٔ متر X است.

واضح است که هر عضو یک خانوادهٔ همپیوسته به طور یکنواخت پیوسته است.

دنبالهٔ مذکور در مثال ۲۱۰۷ همپیوسته نمی‌باشد.

قضایای ۲۴۰۷ و ۲۵۰۷ نشان می‌دهند که بین همپیوستگی، از یک سو، و همگرایی یکنواخت دنباله‌های توابع پیوسته، از جهت دیگر، رابطهٔ بسیار نزدیکی وجود دارد. لکن ما ابتدا یک فرایند گزینش را که هیچ ربطی به پیوستگی ندارد شرح می‌دهیم.

۲۳۰۷ قضیه. هرگاه $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ نقطه‌به‌نقطه‌کراندار از توابع مختلط بر مجموعهٔ شمارشپذیر E باشد، آنگاه $\{f_n\}$ زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_k}\}$ دارد بطوری‌که $\{f_{n_k}(x)\}$ به ازای هر $x \in E$ همگرا است.

برهان. فرض کنیم $\{x_i\}$ ، $i = 1, 2, 3, \ldots$ ، نقاط E باشد که به شکل یک دنباله آراسته شده‌اند. چون $\{f_n(x_1)\}$ کراندار است، زیردنباله‌ای مانند $\{f_{1,k}\}$ هست که وقتی $k \to \infty$ ، $\{f_{1,k}(x_1)\}$ همگرا می‌باشد.

حال به دنبالهٔ $S_1, S_2, S_3, \ldots$ که با آرایهٔ

$$\begin{array}{llllll} S_1: & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & \cdots \\ S_2: & f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & \cdots \\ S_3: & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

نشانش می‌دهیم و از خواص زیر برخوردار است توجه می‌کنیم:

(آ) به ازای $n = 2, 3, 4, \ldots$ ، S_n زیردنباله‌ای از S_{n-1} است؛

(ب) وقتی $k \to \infty$ ، $\{f_{n,k}(x_n)\}$ همگراست (کرانداربودن $\{f_n(x_n)\}$ انتخاب S_n را به این طریق ممکن می‌سازد)؛

(پ) ترتیب ظاهر شدن تابعها در هر دنباله یکی است؛ یعنی، اگر در S_1 تابعی پیش از دیگری باشد، این رابطه در هر S_n بینشان هست تا اینکه یکی از آنها حذف شود. درنتیجه، وقتی درآرایهٔ فوق از یک سطر به سطر بعد می‌رویم، ممکن است تابعها به چپ حرکت‌کنند ولی هرگز به راست نخواهند رفت.

حال در امتداد قطر آرایه پایین می‌رویم؛ یعنی، دنبالهٔ

$$S: \; f_{1,1} \;\; f_{2,2} \;\; f_{3,3} \;\; f_{4,4} \cdots$$

را در نظرمی‌گیریم. بنابر (پ)، دنبالهٔ S (بجزاحتمالا "$n-1$" جملهٔ اول آن) یک‌زیر‌دنبالهٔ S_n به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ است. پس (ب) ایجاب خواهد کرد که به ازای هر $x_i \in E$ ، $\{f_{n,n}(x_i)\}$ ، وقتی $n \to \infty$ ، همگرا باشد.

۲۴۰۷ قضیه. هرگاه K یک فضای متری فشرده بوده، $f_n \in \mathscr{C}(K)$ به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، و $\{f_n\}$ بر K به طور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه $\{f_n\}$ بر K همپیوسته خواهد بود.

برهان. فرض‌کنیم $\varepsilon > 0$ را داده‌باشند. چون $\{f_n\}$ به‌طوریکنواخت همگراست، عددی

صحیح مانند N هست بقسمی که

$$\|f_n - f_N\| < \varepsilon \qquad (n > N). \tag{42}$$

(ر.ک. تعریف ۷.۱۴۰) چون توابع پیوسته بر مجموعه‌های فشرده به طور یکنواخت پیوسته‌اند، δ ی‌مثبتی هست بطوری که اگر $1 \le i \le N$ و $d(x, y) < \delta$،

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon. \tag{43}$$

چنانچه $n > N$ و $d(x, y) < \delta$ ، نتیجه خواهد شد که

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < 3\varepsilon.$$

این، درمعیت (۴۳)، قضیه را اثبات خواهد کرد.

۷.۲۵ قضیه. *هرگاه K فشرده بوده، $f_n \in \mathscr{C}(K)$ به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، و $\{f_n\}$ بر K نقطه به نقطه کراندار و همپیوسته باشد، آنگاه*

(آ) $\{f_n\}$ بر K به طور یکنواخت کراندار است؛

(ب) $\{f_n\}$ شامل زیر دنباله‌ای به طور یکنواخت همگرا می‌باشد.

برهان

(آ) فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند، و $\delta > 0$ را طبق تعریف ۷.۲۲ اختیار می‌کنیم. در نتیجه، اگر $d(x, y) < \delta$ ، به ازای هر n داریم

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon. \tag{44}$$

چون K فشرده است، تعدادی متناهی نقطه مانند $p_1, \ldots, p_r$ در K هست بطوری که‌هر $x \in K$ نظیردست کم یک p_i با خاصیت $d(x, p_i) < \delta$ می‌باشد. و چون $\{f_n\}$ نقطه به‌نقطه کرانداراست، M_i ی کوچکتراز ∞ هست بطوری که‌به‌ازای هر n، $|f_n(p_i)| < M_i$. هرگاه $M = \max(M_1, \ldots, M_r)$، آنگاه به ازای هر $x \in K$، $|f(x)| < M + \varepsilon$. این (آ) را ثابت می‌کند.

(ب) فرض‌کنیم E زیر مجموعهٔ چگال شمارش‌پذیری‌از K باشد. (برای اطلاع از وجود چنین مجموعه، ر.ک. تمرین ۲۵، فصل ۲.) قضیهٔ ۷.۲۳ نشان می‌دهد که $\{f_n\}$ زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_i}\}$ دارد بطوری که $\{f_{n_i}(x)\}$ به ازای هر $x \in E$ همگراست.

برای‌آنکه نمادگذاری ساده شود، قرار می‌دهیم $f_{n_i} = g_i$. ثابت می‌کنیم $\{g_i\}$ بر K به طور یکنواخت همگراست.

فرض کنیم $0 < \varepsilon$ و $\delta > 0$ را مثل اول برهان اختیار می‌کنیم. گیریم $V(x, \delta)$ مجموعهٔ تمام $y \in K$هایی باشد که $d(x, y) < \delta$. چون E در K چگال و K فشرده است، تعدادی متناهی نقطه مانند $x_1, \ldots, x_m$ در E هستند بطوری که

$$K \subset V(x_1, \delta) \cup \cdots \cup V(x_m, \delta). \tag{45}$$

و چون به ازای هر $x \in E$ ، $\{g_i(x)\}$ همگراست، عدد صحیحی مثل N هست بطوری که هر وقت $i \geq N$ ، $j \geq N$ ، و $1 \leq s \leq m$ ، داریم

$$|g_i(x_s) - g_j(x_s)| < \varepsilon. \tag{46}$$

چنانچه $x \in K$ ، رابطهٔ (۴۵) نشان می‌دهد که به‌ازای s ی $x \in V(x_s, \delta)$. پس، به ازای هر i ،

$$|g_i(x) - g_i(x_s)| < \varepsilon.$$

اگر $i \geq N, j \geq N$ ، از نامساوی (۴۶) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}|g_i(x) - g_j(x)| &\leq |g_i(x) - g_i(x_s)| + |g_i(x_s) - g_j(x_s)| + |g_j(x_s) - g_j(x)| \\ &< 3\varepsilon.\end{aligned}$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

قضیهٔ استون ــ وایراشتراس

۲۶.۷ قضیه. *هرگاه f تابع مختلط پیوسته‌ای بر $[a, b]$ باشد، دنباله‌ای از چندجمله‌ایها مانند P_n هست بطوری که*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

به طور یکنواخت بر $[a, b]$. چنانچه f حقیقی باشد، P_n ها را می‌توان حقیقی گرفت.

این همان شکلی از قضیه است که در آغاز توسط وایراشتراس کشف شد.

برهان. بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود می‌توانیم فرض کنیم $[a, b] = [0, 1]$. همچنین، می‌شود فرض کرد که $f(0) = f(1) = 0$. زیرا با این فرض که قضیه برای این حالت درست است، رابطهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)] \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

در اینجا $g(0) = g(1) = 0$ ، و اگر g حد یک دنبالهٔ به‌طور یکنواخت همگرا از چند‌جمله‌ایها باشد ، واضح است که f نیز ، به دلیل چند جمله‌ای بودن $f - g$ ، چنین خواهد بود .

بعلاوه ، $f(x)$ را به ازای x های خارج $[0, 1]$ صفر تعریف می‌کنیم . دراین‌صورت ، f بر تمام خط حقیقی به طور یکنواخت پیوسته است .

قرار می‌دهیم

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{47}$$

که در آن c_n قسمی اختیار شده که

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\, dx = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{48}$$

ما در مورد میزان بزرگی c_n به اطلاعاتی نیاز داریم . گوییم چون

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\, dx = 2\int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx &\ge 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n\, dx \\ &\ge 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - nx^2)\, dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{n}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

از (۴۸) نتیجه می‌شود که

$$c_n < \sqrt{n}. \tag{49}$$

نامساوی $(1 - x^2)^n \ge 1 - nx^2$ بـه کار رفته در فوق را می‌توان با توجه به تابع

$$(1 - x^2)^n - 1 + nx^2 ،$$

که در $x = 0$ صفر بوده و مشتقش در $(0, 1)$ مثبت است ، به آسانی اثبات کرد .

به ازای هر $\delta > 0$ ، رابطهٔ (۴۹) ایجاب خواهد کرد که

$$Q_n(x) \le \sqrt{n}\,(1 - \delta^2)^n \qquad (\delta \le |x| \le 1). \tag{50}$$

پس $Q_n \to 0$ به طور یکنواخت در $\delta \le |x| \le 1$.

حال قرار می‌دهیم

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x + t) Q_n(t)\, dt \qquad (0 \le x \le 1). \tag{51}$$

فرضهای ما در باب f نشان می‌دهند که با تغییر متغیر ساده‌ای داریم

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x + t) Q_n(t)\, dt = \int_0^1 f(t) Q_n(t - x)\, dt,$$

و آخرین انتگرال بوضوح یک چند جمله‌ای از x است. لذا، $\{P_n\}$ دنباله‌ای است از چند جمله‌ایها که اگر f حقیقی باشد، جمله حقیقی خواهند بود.

به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، $\delta > 0$ را قسمی اختیار می‌کنیم که $|y - x| < \delta$ نامساوی

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

را ایجاب کند. فرض می‌کنیم $M = \sup |f(x)|$. با استفاده از (۴۸)، (۵۰)، و اینکه $Q_n(x) \geq 0$، می‌بینیم که به ازای $0 \leq x \leq 1$ و هر n به قدر کافی بزرگ

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)] Q_n(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)\, dt \\ &\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\, dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\, dt + 2M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\, dt \\ &\leq 4M \sqrt{n}\, (1 - \delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

که قضیه را ثابت خواهد کرد.

رسم نمودار Q_n به ازای چند مقدار از n آموزنده است. همچنین، توجه کنید که برای نیل به همگرایی یکنواخت $\{P_n\}$ پیوستگی یکنواخت f لازم بود.

در برهان قضیهٔ ۳۲۰۷ همهٔ توان قضیهٔ ۲۶۰۷ مورد حاجت نیست، بلکه فقط از حالت خاص زیر، که به صورت نتیجه بیان شده، استفاده خواهد شد.

۲۷۰۷ نتیجه. به‌ازای هر بازه مانند $[-a, a]$، دنباله‌ای از چند جمله‌ایهای حقیقی مانند P_n وجود دارد که $P_n(0) = 0$ و

$$\lim_{n \to \infty} P_n(x) = |x|$$

به طور یکنواخت بر $[-a, a]$.

برهان. بنابر قضیهٔ ۲۶۰۷، دنباله‌ای از چند جمله‌ایهای حقیقی مانند $\{P_n^*\}$ وجود دارد که به طور یکنواخت بر $[-a, a]$ به $|x|$ همگراست. در حالت خاص، وقتی $n \to \infty$، $P_n^*(0) \to 0$. چند جمله‌ایهای

$$P_n(x) = P_n^*(x) - P_n^*(0) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

خواص مطلوب را دارا **خواهند** بود .

حال آن خـواص از چنـد جمله‌ایها که قضیهٔ وایراشتراس را ممکن می‌سازنـد جدا می‌کنیم .

۲۸۰۷ تعریف . خانوادهٔ $\mathscr{A}$ از توابع مختلط تعریف شده بر مجموعهٔ E را یک **جبر** نامند هرگاه به ازای هر $f, g \in \mathscr{A}$ و هر ثابت مختلط c ، (یک) $f + g \in \mathscr{A}$ ، (دو) $fg \in \mathscr{A}$ ، و (سه) $cf \in \mathscr{A}$ ؛ یعنی ، هرگاه $\mathscr{A}$ تحت جمع ، ضرب ، و ضرب در اسکالر بسته باشد .

همچنین ، بـاید جبرهای توابع حقیقی را نیز در نظر گرفت ؛ البته ، در این حالت فقط کافی است قسمت (سه) برای تمام c های حقیقی برقرار باشد .

هرگاه $\mathscr{A}$ این خاصیت را دارا باشد که وقتی $f_n \in \mathscr{A}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ و $f_n \to f$ به‌طوریکنواخت بر E ، $f \in \mathscr{A}$ آنگاه گفته می‌شود که $\mathscr{A}$ **به طور یکنواخت بسته‌است** .

فرض کنیم $\mathscr{B}$ مجموعهٔ تمام توابعی باشد که حدود دنباله‌های به طور یکنواخت همگرایی از اعضای $\mathscr{A}$ اند . در ایـن صـورت ، $\mathscr{B}$ را **بست یکنواخت** $\mathscr{A}$ می‌نامند . (ر.ک. تعریف ۱۴۰۷ .)

برای مثـال ، مجموعهٔ تمام چند جمله‌ایها یک جبر است ، و قضیهٔ وایراشتراس را می‌توان این‌طور گفت که مجموعهٔ توابع پیوسته بر $[a, b]$ بست یکنواخت مجموعهٔ چندجمله‌ایها بر $[a, b]$ می‌باشد .

۲۹۰۷ قضیه . فرض‌کنیم $\mathscr{B}$ بست یکنواخت جبر $\mathscr{A}$ مرکب از توابع کراندار باشد . در این صورت ، $\mathscr{B}$ یک جبر به طور یکنواخت بسته خواهد بود .

برهان . هـرگاه $f \in \mathscr{B}$ و $g \in \mathscr{B}$ ، دنباله‌هایی بـه‌طور یکنواخت همگرا مانند $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ وجود دارند بطوری که $f_n \to f$ ، $g_n \to g$ ، و $f_n \in \mathscr{A}$ ، $g_n \in \mathscr{A}$. چون سر و کار ما با توابع کراندار است ، به‌آسانی می‌توان نشان داد که

$$f_n + g_n \to f + g, \qquad f_n g_n \to fg, \qquad cf_n \to cf,$$

که c ثابت بوده و همگرایی در هر حالت یکنواخت می‌باشد .

لذا ، $f + g \in \mathscr{B}$ ، $fg \in \mathscr{B}$ و $cf \in \mathscr{B}$ ؛ درنتیجه ، $\mathscr{B}$ یک جبر خواهد بود .

بر طبق قضیهٔ ۲۷۰۲ ، $\mathscr{B}$ (به‌طور یکنواخت) بسته است .

۳۰۰۷ **تعریف.** فرض کنیم $\mathscr{A}$ خانواده‌ای از توابع بر مجموعهٔ E باشد. در این صورت، می‌گوییم $\mathscr{A}$ ***نقاط E را جدا می‌کند*** هرگاه به‌هر جفت متمایز نقطه مانند $x_1, x_2 \in E$ تابعی چون $f \in \mathscr{A}$ قسمی نظیر شده باشد که $f(x_1) \neq f(x_2)$.

چنانچه به هر $x \in E$ تابعی مانند $g \in \mathscr{A}$ نظیر شده باشد که $g(x) \neq 0$، می‌گوییم ***$\mathscr{A}$ در هیچ نقطهٔ E صفر نمی‌شود.***

واضح‌است که جبر تمام چندجمله‌ایهای یک متغیره این خواص را بر R^1 دارد. یک نمونه از جبرهایی که نقاط را جدا نمی‌کنند مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایهای زوج، مثلاً " بر $[-1, 1]$"، است، زیرا به ازای هر تابع زوج f، $f(-x) = f(x)$.

قضیهٔ زیر این مفهومها را بیشتر توضیح می‌دهد.

۳۱۰۷ قضیه. ***فرض کنیم $\mathscr{A}$ یک جبر از توابع بر مجموعهٔ E باشد، $\mathscr{A}$ نقاط E را جدا کند، و $\mathscr{A}$ در هیچ نقطهٔ E صفر نشود. x_1 و x_2 را نقاط متمایزی از E گرفته، و c_1 و c_2 را ثابتهای (حقیقی در صورتی که $\mathscr{A}$ یک جبر حقیقی است) می‌انگاریم. در این‌صورت، $\mathscr{A}$ تابعی را شامل است چون f که***

$$f(x_1) = c_1, \qquad f(x_2) = c_2.$$

برهان. مفروضات نشان می‌دهند که $\mathscr{A}$ شامل توابعی چون g، h، و k است که

$$g(x_1) \neq g(x_2), \qquad h(x_1) \neq 0, \qquad k(x_2) \neq 0.$$

قرار می‌دهیم

$$u = gk - g(x_1)k, \qquad v = gh - g(x_2)h.$$

در این صورت، $u \in \mathscr{A}$، $v \in \mathscr{A}$، $u(x_1) = v(x_2) = 0$، $u(x_2) \neq 0$، و $v(x_1) \neq 0$. لذا،

$$f = \frac{c_1 v}{v(x_1)} + \frac{c_2 u}{u(x_2)}$$

خواص مطلوب را خواهد داشت.

حال تمام وسائل لازم برای تعمیم استون از قضیهٔ وایراشتراس در اختیار ما قرار دارد.

۳۲۰۷ قضیه. ***فرض کنیم $\mathscr{A}$ یک جبر از توابع حقیقی پیوسته بر مجموعهٔ فشردهٔ K باشد.***

هرگاه $\mathscr{A}$ نقاط K را جدا کند و در هیچ نقطه از K صفر نشود، آنگاه بست یکنواخت $\mathscr{B}$ از $\mathscr{A}$ از تمام توابع حقیقی و پیوسته بر K تشکیل شده است.

برهان را به چهار مرحله تقسیم می‌کنیم.

مرحلهٔ ۱. هرگاه $f \in \mathscr{B}$، آنگاه $|f| \in \mathscr{B}$.

برهان. قرار می‌دهیم

$$a = \sup |f(x)| \qquad (x \in K), \tag{52}$$

و فرض می‌کنیم $0 < \varepsilon$ داده شده باشد. بنابرنتیجهٔ ۲۷.۷، اعدادی حقیقی مانند $c_1, \ldots, c_n$ وجود دارند بطوری که

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i y^i - |y| \right| < \varepsilon \qquad (-a \le y \le a). \tag{53}$$

چون $\mathscr{B}$ یک جبر است، تابع

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i f^i$$

عضوی از $\mathscr{B}$ است. بنابر (۵۲) و (۵۳)، داریم

$$\big| g(x) - |f(x)| \big| < \varepsilon \qquad (x \in K).$$

چون $\mathscr{B}$ به طور یکنواخت بسته است، این نشان خواهد داد که $|f| \in \mathscr{B}$.

مرحلهٔ ۲. هرگاه $f \in \mathscr{B}$ و $g \in \mathscr{B}$، آنگاه $\max(f,g) \in \mathscr{B}$ و $\min(f,g) \in \mathscr{B}$.

منظور از $\max(f,g)$ یعنی تابعی چون h که این طور تعریف شده است:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } f(x) \ge g(x), \\ g(x) & \text{اگر } f(x) < g(x). \end{cases}$$

$\min(f,g)$ به همین نحو تعریف خواهد شد.

برهان. مرحلهٔ ۲ از مرحلهٔ ۱ و اتحادهای

$$\max(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2},$$

$$\min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

به دست می‌آید .

البته، با تکرار می‌توان نتیجه را به هر مجموعهٔ متناهی از توابع تعمیم داد: هرگاه $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{B}$ ، آنگاه $\max(f_1, \ldots, f_n) \in \mathscr{B}$ و

$$\min(f_1, \ldots, f_n) \in \mathscr{B}.$$

مرحلهٔ ۳ . هرگاه تابع حقیقی و بر K پیوستهٔ f ، نقطهٔ $x \in K$ ، و $\varepsilon > 0$ مفروض باشند ، تابعی مانند $g_x \in \mathscr{B}$ وجود خواهد داشت بقسمی که $g_x(x) = f(x)$ و

$$g_x(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (t \in K). \tag{54}$$

برهان . چون $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ و $\mathscr{A}$ در مفروضات قضیهٔ ۳۱۰۷ صدق می‌کند، $\mathscr{B}$ نیز چنین خواهد کرد . لذا ، به ازای هر $y \in K$ ، می‌توان تابعی مانند $h_y \in \mathscr{B}$ را طوری یافت که

$$h_y(x) = f(x), \qquad h_y(y) = f(y). \tag{55}$$

بنابر پیوستگی h_y ، مجموعهٔ بازی مانند J_y هست ، شامل y ، که

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (t \in J_y). \tag{56}$$

و چون K فشرده است ، مجموعه‌ای متناهی از نقاط مانند $y_1, \ldots, y_n$ وجود دارد بطوری که

$$K \subset J_{y_1} \cup \cdots \cup J_{y_n}. \tag{57}$$

قرار می‌دهیم

$$g_x = \max(h_{y_1}, \ldots, h_{y_n}).$$

بنابر مرحلهٔ ۲ ، $g \in \mathscr{B}$ ، و روابط (۵۵) تا (۵۷) نشان می‌دهند که g_x خواص لازم دیگر را نیز دارد .

مرحلهٔ ۴ . هرگاه تابع حقیقی و بر K پیوستهٔ f و $\varepsilon > 0$ مفروض باشند ، تابعی مانند $h \in \mathscr{B}$ وجود خواهد داشت بطوری که

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in K). \tag{58}$$

چون $\mathscr{B}$ به طور یکنواخت بسته است ، این حکم معادل قضیهٔ ما خواهد بود .

برهان. توابع g_x ، به‌ازای‌هر $x \in K$ ، راکه‌در مرحلهٔ ۳ ساخته شدند در نظرمی‌گیریم . بنابر پیوستگی g_x ، مجموعه‌های بازی چون V_x شامل x وجود دارند بطوری که

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon \qquad (t \in V_x). \tag{59}$$

چون K فشرده است ، مجموعه‌ای متناهی از نقاط مانند $x_1, \ldots, x_m$ هست بقسمی که

$$K \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}. \tag{60}$$

قرار می‌دهیم

$$h = \min(g_{x_1}, \ldots, g_{x_m}).$$

بنابر مرحلهٔ ۲ ، $h \in \mathscr{B}$ ، و (۵۴) ایجاب می‌کند که

$$h(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (t \in K), \tag{61}$$

حال آنکه (۵۹) و (۶۰) نتیجه می‌دهند که

$$h(t) < f(t) + \varepsilon \qquad (t \in K). \tag{62}$$

بالاخره ، (۵۸) از (۶۱) و (۶۲) به دست خواهد آمد .

قضیهٔ ۳۲۰۷ برای جبـرهای مختلط برقرار نیست . مثال ناقض در تمرین ۲۱ داده شده اسـت . لکن اگـر شرط اضافـی *خودالحاقی* را بـر $\mathscr{A}$ بگذاریم ، این قضیه حتی برای جبرهای مختلط نیز برقرار می‌شود . شرط به این معنی است که به ازای هر $f \in \mathscr{A}$ مزدوج مختلط f ، یعنی $\bar{f}$ ، نیز بایدبه $\mathscr{A}$ متعلق باشد ؛ $\bar{f}$ با $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ تعریف‌می‌شود .

۳۳۰۷ قضیه. *فرض کنیـم $\mathscr{A}$ یـک جبر خودالحاقی از توابع مختلط پیوسته بر مجموعهٔ فشردهٔ K بوده، $\mathscr{A}$ نقاط K را جداکند ،و $\mathscr{A}$ در هیچ نقطه از K صفر نشود . در این‌صورت ، بست یکنواخت $\mathscr{B}$ از $\mathscr{A}$ از تمام توابع مختلط و پیوسته بر K تشکیل شده است . به عبارت دیگر، $\mathscr{A}$ در $\mathscr{C}(K)$ چگال می‌باشد .*

برهان. فرض کنیم $\mathscr{A}_R$ مجموعهٔ تمام توابع حقیقی بر K باشد که متعلق به $\mathscr{A}$ هستند .

هرگاه $f \in \mathscr{A}$ و $f = u + iv$ ، که‌در آن u و v حقیقی‌اند ، آنگاه $2u = f + \bar{f}$ و ، چون

$\mathscr{A}$ خودالحاقی است، خواهیم دیدکه $u \in \mathscr{A}_R$. چنانچه $x_1 \neq x_2$ ، تابعی مانند $f \in \mathscr{A}$ هست که $f(x_1) = 1$ و $f(x_2) = 0$. پس $0 = u(x_2) \neq u(x_1) = 1$ ، مبین آنکه $\mathscr{A}_R$ نقاط K را جدا می‌کند. هرگاه $x \in K$ ، آنگاه به ازای g ای در $\mathscr{A}$ ، $g(x) \neq 0$ ، و عدد مختلطی مانند λ هست که $\lambda g(x) > 0$. چنانچه $f = \lambda g$ و $f = u + iv$ ، نتیجه می‌شود که $u(x) > 0$. پس $\mathscr{A}_R$ در هیچ نقطه از K صفر نخواهد شد.

بنابراین، $\mathscr{A}_R$ در مفروضات قضیهٔ ۳۲۰۷ صدق می‌کند. درنتیجه، هر تابع حقیقی و پیوسته بر K در بست یکنواخت $\mathscr{A}_R$ ، و لذا، در $\mathscr{B}$ قرار دارد. هرگاه f تابع مختلط پیوسته‌ای بر K بوده و $f = u + iv$ ، آنگاه $u \in \mathscr{B}, v \in \mathscr{B}$. پس $f \in \mathscr{B}$. این برهان را تمام خواهد کرد.

تمرین

۱ . ثابت کنید هر دنبالهٔ به طور یکنواخت همگرا از توابع کراندار به‌طوریکنواخت کراندار است.

۲ . هرگاه $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ بر مجموعهٔ E به طوریکنواخت همگرا باشند، ثابت کنید $\{f_n + g_n\}$ نیز بر E به طور یکنواخت همگرا است. چنانچه، علاوه بر این، $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله‌هایی از توابع کراندار باشند، ثابت کنید $\{f_n g_n\}$ بر E به طور یکنواخت همگرا خواهد بود.

۳ . دنباله‌های $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ را قسمی بسازید که بر مجموعه‌ای چون E به طور یکنواخت‌همگراباشند، ولی $\{f_n g_n\}$ بر E به طور یکنواخت همگرا نباشد (البته، $\{f_n g_n\}$ باید بر E همگرا باشد).

۴ . فرض کنید

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x}.$$

این سری به ازای چه x هایی به طور مطلق همگراست؟ بر چه بازه‌هایی به طور یکنواخت‌همگرا می‌شود؟ بر چه بازه‌هایی به طور یکنواخت همگرا نیست؟ آیا هرجا که سری همگراست f پیوسته است؟ آیا f کراندار است؟

۵ . فرض کنید

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \left(x<\dfrac{1}{n+1}\right),\\ \sin^2\dfrac{\pi}{x} & \left(\dfrac{1}{n+1}\le x\le\dfrac{1}{n}\right)\\ 0 & \left(\dfrac{1}{n}<x\right).\end{cases}$$

نشان دهید که $\{f_n\}$ به تابع پیوسته‌ای همگراست اما نه به طور یکنواخت. با استفاده از سری Σf_n نشان‌دهید‌که‌همگرایی مطلق، حتی به ازای هر x، همگرایی یکنواخت را ایجاب نمی‌کند.

۶. ثابت کنید سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$$

در هر بازهٔ کراندار به طور یکنواخت همگراست، ولی به ازای هیچ x ی به طور مطلق همگرا نیست.

۷. به ازای $n=1,2,3,\ldots$ و x حقیقی قرار دهید

$$f_n(x)=\frac{x}{1+nx^2}.$$

نشان دهید که $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به تابعی چون f همگراست، و معادلهٔ

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f'_n(x)$$

اگر $x\neq 0$، درست است ولی، اگر $x=0$، درست نخواهد بود.

۸. هرگاه

$$I(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0),\\ 1 & (x>0),\end{cases}$$

$\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط متمایز (a,b) باشد، و $\Sigma|c_n|$ همگرا فرض شود، ثابت کنید سری

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nI(x-x_n)\qquad(a\le x\le b)$$

به طور یکنواخت همگراست و f به ازای هر $x\neq x_n$ پیوسته می‌باشد.

۹. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای ازتوابع پیوسته باشد که به تابعی چون f بر E به طور یکنواخت همگراست. ثابت کنید به ازای هر دنباله از نقاط مانند $x_n\in E$ که $x_n\to x$ و $x\in E$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x).$$

آیا عکس این مطلب درست است؟

۱۰ . با این فرض که (x) قسمت کسری عدد حقیقی x است (برای تعریف آن، ر.ک. تمرین ۱۶، فصل ۴)، تابع

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2} \quad (\text{حقیقی } x)$$

را در نظربگیرید. تمام ناپیوستگیهای f را یافته، نشان دهید که مجموعه‌ای چگال و شمارشپذیر تشکیل می‌دهند. نشان دهید که f در عین حال بر هر بازهٔ کراندار انتگرال ریمان دارد.

۱۱ . فرض کنید $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ بر E تعریف شده باشند، و

(آ) دنبالهٔ مجموعهای جزئی Σf_n به طور یکنواخت کراندار باشد؛

(ب) $g_n \to 0$ به طور یکنواخت بر E؛

(پ) به ازای هر $x \in E$، $g_1(x) \ge g_2(x) \ge g_3(x) \ge \cdots$.

ثابت کنید $\Sigma f_n g_n$ بر E به طور یکنواخت همگراست. **راهنمایی**: قس. قضیهٔ ۴۲.۳.

۱۲ . فرض کنید g و f_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ بر $(0, \infty)$ تعریف شده باشند، بر $[t, T]$ (وقتی $0 < t < T < \infty$) انتگرال ریمان داشته باشند، $|f_n| \le g$، $f_n \to f$ به طور یکنواخت بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $(0, \infty)$، و

$$\int_0^{\infty} g(x)\,dx < \infty.$$

ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

(برای تعریفهای مربوطه، ر.ک. تمرینهای ۷ و ۸ فصل ۶.)

این شکل نسبتا" ضعیفی از قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ (قضیهٔ ۳۲.۱۱) است. حتی درمبحث انتگرال ریمان نیز، اگر $f \in \mathscr{R}$ فرض شود، می‌توان همگرایی یکنواخت را با همگرایی نقطه به نقطه عوض کرد[1].

---

۱. ر.ک. مقاله‌های زیر:

F. Cunningham in *Math. Mag.*, vol. 40, 1967, pp. 179–186;
H. Kestelman in *Amer. Math. Monthly*, vol. 77, 1970, pp. 182–187.

۱۳ . فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع صعودی بر R^1 باشد و ، به ازای هر x و هر n ، $0 \le f_n(x) \le 1$.

(آ) ثابت کنید تابعی چون f و دنباله‌ای مانند $\{n_k\}$ موجودند بطوری که به ازای هر $x \in R^1$ ،

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x).$$

(وجود چنین زیردنباله‌ٔ نقطه به نقطه همگرا را معمولا " قضیهٔ انتخاب هلی[1] می‌نامند .)

(ب) چنانچه ، علاوه‌براین ، f پیوسته‌هم باشد ، ثابت کنید $f_{n_k} \to f$ به طور یکنواخت بر R^1 .

راهنمایی : (یک) زیردنباله‌ای‌مانند $\{f_{n_i}\}$ در تمام نقاط گویای r ، مثلا " به $f(r)$ ، همگراست . (دو) به ازای هر $x \in R^1$ ، $f(x)$ را مساوی $\sup f(r)$ تعریف کنید ؛ این سوپرمم روی تمام r های نابیشتر از x گرفته می‌شود . (سه) نشان دهید که در هر x ی که f درآن پیوسته باشد ، $f_{n_i}(x) \to f(x)$. (اینجاست که یکنوایی قویا " به‌کار گرفته شده است .)

(چهار) زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_i}\}$ درهر نقطهٔ ناپیوستگی f همگراست ، زیرا از این نقاط حداکثر تعدادی شمارشپذیر وجود دارد . این (آ) را ثابت خواهد کرد . برای اثبات (ب) ، برهان قسمت (سه)را بنحوی مقتضی اصلاح‌نمایید .

۱۴ . فرض کنید f تابع حقیقی پیوسته‌ای بر R^1 با خواص زیر باشد:

به ازای هر t ، $0 \le f(t) \le 1$ ، $f(t+2) = f(t)$ ، و

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \le t \le \frac{1}{3}), \\ 1 & (\frac{2}{3} \le t \le 1). \end{cases}$$

قرار دهید $\Phi(t) = (x(t), y(t))$ که در آن

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-1}t), \qquad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n}t).$$

ثابت کنید Φ پیوسته است ، و Φ ، $I = [0, 1]$ را بروی مربع یکهٔ $I^2 \subset R^2$ می‌نگارد . درواقع ، نشان دهید که Φ مجموعهٔ کانتور را بروی I^2 می‌نگارد . **راهنمایی :** هر $(x_0, y_0) \in I^2$ از این شکل برخوردار است :

1. *Helly*

$$x_0=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}a_{2n-1}, \qquad y_0=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}a_{2n}$$

که در آنها هر a_i مساوی صفر یا یک است . اگر

$$t_0=\sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i-1}(2a_i),$$

نشان دهید که $f(3^k t_0)=a_k$ ؛ و درنتیجه ، $x(t_0)=x_0$ و $y(t_0)=y_0$.
(این مثال ساده را "منحنی فضاپرکن" نامیده و به شونبرگ نسبت می‌دهند.[1])

۱۵ . فرض کنید f یک تابع حقیقی پیوسته بر R^1 بوده ، به ازای $n=1, 2, 3, \ldots$ ، $f_n(t)=f(nt)$ ، و $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ همپیوسته‌باشد . چه نتیجه‌ای می‌توان در مورد f گرفت ؟

۱۶ . فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ٔ همپیوسته‌ای از توابع بر مجموعهٔ فشردهٔ K و $\{f_n\}$ بر K نقطه به نقطه همگرا باشد . ثابت‌کنید $\{f_n\}$ بر K به طوریکنواخت همگرا می‌باشد .

۱۷ . مفاهیم همگرایی یکنواخت و همپیوستگی را بـرای نگاشتهـای بتوی فضاهای‌متری تعریف کنید . نشان دهیـد که قضایای ۹۰۷ و ۱۲۰۷ برای نگاشتهای بتوی‌فضاهای متری ، قضایای ۸۰۷ و ۱۱۰۷ برای نگاشتهای بتوی فضاهای متری تام ، و قضیه‌های ۱۰۰۷ ، ۱۶۰۷ ، ۱۷۰۷ ، ۲۴۰۷ ، و ۲۵۰۷برای توابع برداری ، یعنی ،نگاشتهایی که بتوی R^k ها هستند ، برقرار می‌باشند .

۱۸ . فرض کنید $\{f_n\}$ دنبالهٔ به طور یکنواخت کراندار‌ی از توابع باشد که بر $[a, b]$ انتگرال ریمان دارند ، و قرار دهید

$$F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\, dt \qquad (a \le x \le b).$$

ثابت‌کنیدزیردنباله‌ای‌چون $\{F_{n_k}\}$ هست‌که بر $[a, b]$ به طور یکنواخت همگراست .

۱۹ . فرض کنید K یک‌فضای‌متری‌فشرده ، و S زیر مجموعه‌ای از $\mathscr{C}(K)$ باشد . ثابت‌کنید S (نسبت به متر تعریف شده در بخش ۱۴۰۷) فشرده است اگر و فقط اگر S به‌طور

---

۱ . ر . ک .
I. J Schoenberg, *Bull. A.M.S.*, vol. 44, 1938, pp. 519.

یکنواخت بسته ، نقطه به نقطه کراندار ، و همپیوسته باشد . (هرگاه S همپیوسته نباشد ، S حاوی دنبالهای است که هیچ زیردنبالهٔ همپیوسته ندارد ؛ درنتیجه ، زیردنبالهای که بر K به طور یکنواخت همگرا باشد نخواهد داشت .)

۲۰ . هرگاه f بر $[0, 1]$ پیوسته باشد و

$$\int_0^1 f(x)x^n\,dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ثابت‌کنید $f(x) = 0$ بر $[0, 1]$. **راهنمایی :** انتگرال حاصل‌ضرب f با هرچند جمله‌ای صفر است . با استفاده از قضیهٔ وایراشتراس نشان دهید که

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = 0 \cdot$$

۲۱ . فرض کنید K دایرهٔ یکه در صفحهٔ مختلط (یعنی ، مجموعهٔ جمیع z هایی که $|z| = 1$) و $\mathscr{A}$ جبر تمام توابع به شکل

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{N} c_n e^{in\theta} \quad (\text{حقیقی } \theta)$$

باشد . در این صورت ، $\mathscr{A}$ نقاط K را جدا می‌کند و $\mathscr{A}$ در هیچ نقطه‌ای از K صفر نمی‌شود . اما ، بااینحال ، توابع پیوسته‌ای بر K وجود دارند که در بست یکنواخت $\mathscr{A}$ نیستند . **راهنمایی :** به ازای هر $f \in \mathscr{A}$

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta = 0,$$

و این مطلب برای هر f موجود در بست $\mathscr{A}$ نیز درست است .

۲۲ . فرض کنید $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ ، وثابت‌کنید چندجمله‌ایهایی چون P_n هستند بطوری که

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f - P_n|^2\,d\alpha = 0.$$

(قس. تمرین ۱۲ ، فصل ۶ .)

۲۳ . قرار دهید $P_0 = 0$ و ، به ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، تعریف کنید

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2}.$$

ثابت کنید

$$\lim_{n \to \infty} P_n(x) = |x|$$

به طور یکنواخت بر $[-1, 1]$.

(این ، اثبات قضیهٔ استون ــ وایر اشتراس را بی‌آنکه ابتدا قضیهٔ ۲۶.۷ ثابت شود ممکن می‌سازد .)

راهنمایی : با استفاده از اتحاد

$$|x| - P_{n+1}(x) = [|x| - P_n(x)]\left[1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right]$$

ثابت کنید که اگر $|x| \le 1$ ، $0 \le P_n(x) \le P_{n+1}(x) \le |x|$ و ، اگر $|x| \le 1$ ،

$$|x| - P_n(x) \le |x|\left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n < \frac{2}{n+1} \cdot$$

۲۴ . فرض کنید X یک فضای متری با متر d باشد . نقطهٔ $a \in X$ را اختیار و آن را ثابت بگیرید . به هر $p \in X$ تابع f_p را که با

$$f_p(x) = d(x, p) - d(x, a) \qquad (x \in X)$$

تعریف می‌شود مربوط نمایید . ثابت‌کنید به‌ازای هر $x \in X$ ، $|f_p(x)| \le d(a, p)$ ؛ ودرنتیجه ، $f_p \in \mathscr{C}(X)$. ثابت کنید به ازای هر $p, q \in X$ ،

$$\|f_p - f_q\| = d(p, q) \cdot$$

اگر $\Phi(p) = f_p$ ، نتیجه‌خواهد شد که Φ یک **یکمتری** (نگاشتی حافظ فاصله) از X بروی $\Phi(X) \subset \mathscr{C}(X)$ است .

فرض کنید Y بست $\Phi(X)$ در $\mathscr{C}(X)$ باشد . نشان دهید که Y تام است .

نتیجه : *X با زیرمجموعهٔ چگالی از یک فضای متری تام Y یکمتر است .*

(تمرین ۲۴ ، فصل ۳ ، برهان دیگری از این مطلب را شامل است .)

۲۵ . فرض‌کنید ϕ یک تابع حقیقی کراندار و پیوسته در نواری باشد که با $0 \le x \le 1$ و $-\infty < y < \infty$ تعریف می‌شود . ثابت کنید مسئله با مقدار اولیهٔ

$$y' = \phi(x, y), \qquad y(0) = c ,$$

جواب دارد . (توجه‌کنیدکه مفروضات این قضیهٔ وجودی از مفروضات قضیهٔ یکتایی نظیرش ضعیفترند . ر.ک. تمرین ۲۷ ، فصل ۵ .)

راهنمایی : n را ثابت نگهداشته به ازای $i = 0, \ldots, n$ قرار دهید $x_i = i/n$.

فرض کنید f_n تابع پیوسته‌ای بر $[0, 1]$ باشد به این نحو که $f_n(0) = c$ ،

اگر $x_i < t < x_{i+1}$ $\quad f_n'(t) = \phi(x_i, f_n(x_i))$ ،

و قرار دهید

$$\Delta_n(t) = f_n'(t) - \phi(t, f_n(t))$$

جز در نقاط x_i که $\Delta_n(t)=0$. در این صورت ،

$$f_n(x)=c+\int_0^x[\phi(t,f_n(t))+\Delta_n(t)]\,dt.$$

$M<\infty$ را قسمی اختیار کنید که $|\phi|\le M$ ، و صحت احکام زیر را تحقیق نمایید :

(آ) مثلاً " بر $[0, 1]$ ، به ازای هر n ، $|f_n'|\le M$ ، $|\Delta_n|\le 2M$ ، $\Delta_n\in\mathscr{R}$ ، و

$$|f_n|\le|c|+M=M_1\,;$$

(ب) $\{f_n\}$ ، به این دلیل که $|f_n'|\le M$ ، بر $[0, 1]$ همپیوسته است؛

(پ) زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_k}\}$ به f ی بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگرا است .

(ت) چون ϕ بر مستطیل $0\le x\le 1, |y|\le M_1$ به طور یکنواخت پیوسته است ،

$$\phi(t,f_{n_k}(t))\to\phi(t,f(t))$$

به طور یکنواخت بر $[0, 1]$ ؛

(ث) $\Delta_n(t)\to 0$ به طور یکنواخت بر $[0, 1]$ ، زیرا در (x_i,x_{i+1})

$$\Delta_n(t)=\phi(x_i,f_n(x_i))-\phi(t,f_n(t))\,;$$

(ج) بنابراین ،

$$f(x)=c+\int_0^x\phi(t,f(t))\,\cdot$$

این f یک جواب مسئلهٔ داده شده است .

۲۶ . قضیهٔ وجودی مشابهی را برای مسئله بامقدار اولیهٔ

$$\mathbf{y}'=\mathbf{\Phi}(x,\mathbf{y}),\qquad \mathbf{y}(0)=\mathbf{c},$$

ثابت کنید که در آن $\mathbf{c}\in R^k$ ، $\mathbf{y}\in R^k$ ، و $\mathbf{\Phi}$ نگاشت کراندار پیوسته‌ای از آن بخش از R^{k+1} که با $0\le x\le 1$ و $\mathbf{y}\in R^k$ تعریف می‌شود بتوی R^k می‌باشد . (قس. تمرین ۲۸ ،فصل ۵ .) **راهنمایی** : از شکل برداری قضیهٔ ۲۵.۷ استفاده کنید .

۸

چند تابع خاص

سریهای توانی

در این بخش چند خاصیت از تابعهایی که با سریهای توانی نموده می‌شوند ، یعنی توابعی به شکل

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$

یا ، بطور کلی ، به شکل

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \tag{2}$$

را به دست می‌آوریم .

این تابعها را **توابع تحلیلی** نام نهاده‌اند .

ما خود را به مقادیر حقیقی x محدود می‌کنیم . از اینرو ، به جای دوایر همگرایی (ر.ک. قضیهٔ ۳۹۰۳) ، با بازه‌های همگرایی مواجه خواهیم بود .

چنانچه سری (۱) به ازای هر x در $(-R, R)$ و $R>0$ ی (R ممکن است $+\infty$ باشد) همگرا شود ، می‌گوییم f به صورت یک سری توانی حول نقطهٔ $x=0$ بسط داده شده است . بهمین نحو ، اگر (۲) به ازای $|x-a|<R$ همگرا باشد ، می‌گوییم f به صورت یک سری توانی حول نقطهٔ $x=a$ بسط داده شده است . ما اغلب برای راحتی ، بی آنکه به کلیت خلل وارد شود ، a را صفر اختیار می‌کنیم .

۱۰۸ قضیه . فرض کنیم سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{3}$$

به ازای $|x| < R$ همگراست ، و تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (|x| < R). \tag{4}$$

در این‌صورت ، (۳) بر $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ ، صرف‌نظر از اینکه چه $\varepsilon > 0$ ی اختیار شده ، به طور یکنواخت همگراست؛ تابع f در $(-R, R)$ پیوسته و مشتق‌پذیر است؛ و

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \qquad (|x| < R). \tag{5}$$

برهان . فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد . به ازای $|x| \leq R - \varepsilon$ داریم

$$|c_n x^n| \leq |c_n (R-\varepsilon)^n| \cdot$$

و چون

$$\Sigma c_n (R-\varepsilon)^n$$

به طورمطلق‌همگراست (هرسری‌توانی ،طبق آزمون ریشه ، درون بازهٔ همگرایی خودبه طور مطلق همگراست) ، قضیهٔ ۱۰۰۷ همگرایی یکنواخت (۳) بر $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ رانشان خواهدداد .

چون وقتی $n \to \infty$ ، $\sqrt[n]{n} \to 1$ ، خواهیم داشت

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|};$$

درنتیجه ، سریهای (۴) و (۵) از یک بازهٔ همگرایی برخوردارند .

چون سری (۵) یک سری توانی است ، در $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ ، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، به طور یکنـــواخت همگراست ، و می‌توان قضیهٔ ۱۷۰۷ (برای سریها به جای دنباله‌ها) را به‌کارگرفت .ازاین‌عمل نتیجه می‌شود که رابطهٔ (۵) به ازای $|x| \leq R - \varepsilon$ برقراراست .

اما ،به‌ازای هر x که $|x| < R$ ، می‌توان $\varepsilon > 0$ ی را طوری یافت که $|x| < R - \varepsilon$.این نشان خواهد داد که (۵) به ازای $|x| < R$ برقرار است .

پیوستگی f از وجود f' نتیجه خواهد شد (قضیهٔ ۲۰۵) .

نتیجه . **با شرایط قضیهٔ ۱۰۸ ، f در $(-R, R)$ از هر مرتبه مشتق دارد که با**

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n x^{n-k} \tag{6}$$

داده می‌شوند .

بخصوص ،

$$f^{(k)}(0) = k!c_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

(در اینجا $f^{(0)}$ به معنی f است ، و $f^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) مشتق k ام f خواهد بود .)

برهان . اگر قضیهٔ ۱۰۸ را متوالیاً بر $f, f', f'', \ldots$ اعمال کنیم ، معادلهٔ (۶) به دست می‌آید . با گذاردن $x = 0$ در (۶) روابط (۷) را خواهیم داشت .

فرمول (۷) فرمول بسیار جالبی است . از یک سو نشان می‌دهد که ضرایب سری توانی بسط f با مقادیر f و مشتقاتش در یک نقطه مشخص می‌شوند . و از طرف دیگر ، اگر ضرایب را داده باشند ، مقادیر مشتقات f در مرکز بازهٔ همگرایی را می‌شود مستقیماً از روی سری توانی خواند .

با اینحال ، توجه دارید که ، باآنکه ممکن است تابع f از هر مرتبه مشتق داشته باشد ، سری $\Sigma c_n x^n$ ، که در آن c_n با (۷) حساب می‌شود ، الزاماً به‌ازای هر $x \neq 0$ همگرا به $f(x)$ نیست . در این حالت f را نمی‌توان به صورت یک سری توانی حول نقطهٔ $x = 0$ بسط داد . چرا که اگر می‌داشتیم $f(x) = \Sigma a_n x^n$ ، باید داشته باشیم

$$n!a_n = f^{(n)}(0) \cdot$$

درنتیجه ، $a_n = c_n$. نمونه‌ای از این وضع در تمرین ۱ داده شده است .

هرگاه سری (۳) در یک نقطهٔ انتهایی ، مثلاً در $x = R$ ، همگرا باشد ، f نه فقط در $(-R, R)$ بلکه در $x=R$ نیز پیوسته است . این مطلب از قضیهٔ آبل نتیجه می‌شود (برای تسهیل در نمادگذاری ، R را یک می‌گیریم) :

۲۰۸ قضیه . فرض کنیم Σc_n همگرا باشد . قرار می‌دهیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (-1 < x < 1).$$

در این صورت ،

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n . \tag{8}$$

برهان . فرض کنیم $s_n = c_n + \cdots + c_0$ و $s_{-1} = 0$. پس

$$\sum_{n=0}^{m} c_n x^n = \sum_{n=0}^{m} (s_n - s_{n-1}) x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m.$$

به ازای $|x| < 1$ ، m را به ∞ میل داده نتیجه می‌گیریم که

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n. \tag{9}$$

فرض می‌کنیم $s = \lim_{n \to 0} s_n$ ، و $\varepsilon > 0$ را معلوم می‌انگاریم. N را قسمی اختیار می‌کنیم که $n > N$ نامساوی

$$|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

را ایجاب کند . در این صورت ، چون

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 \qquad (|x| < 1),$$

اگر به ازای $\delta > 0$ ای که مناسب اختیار شده $x > 1 - \delta$ ، از (۹) خواهیم داشت

$$|f(x) - s| = \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) x^n \right| \le (1-x) \sum_{n=0}^{N} |s_n - s| \, |x|^n + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon.$$

این (۸) را ایجاب خواهد کرد .

به عنوان کاربرد ، قضیهٔ ۵۱۰۳ را ثابت می‌کنیم که این طور حکم می‌کند :
هرگاه Σa_n ، Σb_n ، و Σc_n همگرا به A ، B ، و C باشند و $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$ ، آنگاه $C = AB$.

گوییم فرض کنیم به ازای $0 \le x \le 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

این سریها به ازای $x < 1$ به طور مطلق همگرا هستند ؛ و درنتیجه ، می‌توانند طبق تعریف ۴۸۰۳ در هم ضرب شوند . وقتی این ضرب انجام گیرد ، خواهیم دید که

$$f(x) \cdot g(x) = h(x) \qquad (0 \le x < 1). \tag{10}$$

بنابر قضیهٔ ۲۰۸ ، وقتی $x \to 1$ ،

$$f(x) \to A, \qquad g(x) \to B, \qquad h(x) \to C. \tag{11}$$

معادلات (۱۰) و (۱۱) ایجاب خواهند کرد که $AB = C$.

حال در مورد تعویض ترتیب جمعبندی قضیه‌ای بیان می‌کنیم . (ر.ک. تمرینهای ۲ و ۳.)

۸.۳ قضیه. هرگاه دنبالهٔ مضاعف $\{a_{ij}\}$ ، $i = 1, 2, 3, \ldots, j = 1, 2, 3, \ldots$ ، **معلوم باشد،**

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{12}$$

و Σb_i **همگرا باشد، آنگاه**

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}. \tag{13}$$

برهان. رابطهٔ (۱۳) را می‌شد به روشی مستقیم شبیه (اگر چه پیچیده‌تر از) روش به کار رفته در قضیهٔ ۵۵.۳ اثبات کرد. لکن روش زیر جالبتر به چشم می‌آید.

فرض‌کنیم E مجموعهٔ شمارشپذیری باشد که از $x_0, x_1, x_2, \ldots$ تشکیل شده است، و نیز وقتی $n \to \infty$ ، $x_n \to x_0$. تعریف می‌کنیم

$$f_i(x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{14}$$

$$f_i(x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad (i, n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{15}$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \qquad (x \in E). \tag{16}$$

حال (۱۴) و (۱۵) همراه با (۱۲) نشان می‌دهند که هر f_i در x_0 پیوسته است. و چون به ازای $x \in E$ ، $|f_i(x)| \le b_i$ ، (۱۶) به طور یکنواخت همگراست. پس g در x_0 پیوسته خواهد بود (قضیهٔ ۱۱.۷). از این نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) = g(x_0) = \lim_{n \to \infty} g(x_n) \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.
\end{aligned}$$

۴۰۸ قضیه . فرض کنیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

و سری در $|x| < R$ همگرا باشد . هرگاه $-R < a < R$ ، آنگاه f را می‌توان به صورت یک سری توانی حول نقطهٔ $x = a$ بسط داد ، که در $|x - a| < R - |a|$ همگرا‌ست و

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \qquad (|x-a| < R - |a|). \tag{17}$$

این تعمیمی است از قضیهٔ ۱۵۰۵ که به **قضیهٔ تیلور** نیز شهرت دارد .

برهان . داریم

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n[(x-a)+a]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m}(x-a)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} c_n a^{n-m} \right] (x-a)^m. \end{aligned}$$

این همان بسط مطلوب حول نقطهٔ $x = a$ می‌باشد . برای اثبات اعتبارش باید تغییری که در ترتیب جمعبندی داده‌ایم توجیه نماییم . قضیهٔ ۳۰۸ نشان می‌دهد که این کار مجاز است هرگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left| c_n \binom{n}{m} a^{n-m}(x-a)^m \right| \tag{18}$$

همگرا باشد . اما (۱۸) با

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot (|x-a| + |a|)^n \tag{19}$$

یکی است ، و (۱۹) همگراست هرگاه $|x-a| + |a| < R$.

بالاخره ، شکل ضرایب در (۱۷) از (۷) نتیجه خواهد شد .

لازم‌است خاطرنشان کنیم که (۱۷) ممکن است عملاً " در بازهٔ وسیعتری از $|x-a| < R - |a|$ همگرا باشد .

هرگاه دوسری توانی‌در $(-R, R)$ به یک تابع همگرا باشند، رابطهٔ (۷) نشان می‌دهدکه‌دوسری‌بایدیکی‌باشند؛ یعنی، از یک ضرایب برخوردار باشند. جالب اینجاست که همین نتیجه را می‌توان از مفروضات خیلی ضعیفتر نیز به دست آورد:

۵۰۸ قضیه. *فرض‌کنیم سریهای $\Sigma a_n x^n$ و $\Sigma b_n x^n$ درقطعهٔ $S = (-R, R)$ همگرا باشند. E را مجموعهٔ تمام x هایی در S می‌گیریم‌که در آنها*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \tag{20}$$

هرگاه E در S نقطهٔ حدی‌داشته باشد، آنگاه به‌ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، $a_n = b_n$. پس (۲۰) به‌ازای هر $x \in S$ برقرار خواهد بود.

برهان. قرار می‌دهیم $c_n = a_n - b_n$ و

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (x \in S). \tag{21}$$

در این صورت، $f(x) = 0$ بر E .

فرض‌کنیم A مجموعهٔ تمام نقاط حدی E در S ، و B از همهٔ نقاط دیگر S تشکیل شده باشد. از تعریف "نقطهٔ حدی" واضح است که B باز می‌باشد. فرض‌کنید بتوان باز بودن A را ثابت کرد. در این صورت، A و B مجموعه‌های باز ازهم جدایی هستند. لذا، ازهم جدا شده خواهند بود (تعریف ۴۵۰۲). چون $S = A \cup B$ همبند است، یکی از A و B باید تهی باشد. بنابه فرض، A تهی نیست. پس B تهی است و $A = S$. چون f در S پیوسته‌است، $A \subset E$. لذا، $E = S$ ، و (۷) نشان می‌دهد که به‌ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، $c_n = 0$ ، که همان نتیجهٔ مطلوب می‌باشد.

بنابراین، باید ثابت شود که A باز است. گوییم هرگاه $x_0 \in A$ ، قضیهٔ ۴۰۸ نشان می‌دهد که

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \qquad (|x - x_0| < R - |x_0|). \tag{22}$$

حکم می‌کنیم که به‌ازای هر n ، $d_n = 0$. در غیراین صورت، k راکوچکترین عدد صحیح نامنفیی می‌گیریم که $d_k \neq 0$. پس

$$f(x) = (x - x_0)^k g(x) \qquad (|x - x_0| < R - |x_0|) \tag{23}$$

که در آن

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{k+m}(x - x_0)^m. \tag{24}$$

چون g در x_0 پیوسته است و

$$g(x_0) = d_k \neq 0,$$

پس $\delta > 0$ ای وجود دارد بطوری که اگر $|x - x_0| < \delta$، $g(x) \neq 0$. از (۲۳) نتیجه می‌شود که اگر $0 < |x - x_0| < \delta$ ، $f(x) \neq 0$. اما این با نقطهٔ حدی E بودن x_0 تعارض دارد.

پس به ازای هر n ، $d_n = 0$. درنتیجه، به ازای هر x ی که برایش (۲۲) برقرار باشد، یعنی در یکی از همسایگیهای x_0 ، $f(x) = 0$. این نشان می‌دهد که A باز است و برهان را تمام خواهد کرد.

توابع نمایی و لگاریتمی

تعریف می‌کنیم

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{25}$$

آزمون نسبت نشان می‌دهد که این سری به ازای هر z مختلط همگر است. با اعمال قضیهٔ ۵۰۳ بر ضرب سریهای به طور مطلق همگرا، داریم

$$\begin{aligned} E(z)E(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}, \end{aligned}$$

که فرمول مهم جمع

$$E(z + w) = E(z)E(w) \qquad (\text{مختلط } z, w) \tag{26}$$

را به ما می‌دهد.

یک نتیجه آن است که

$$E(z)E(-z) = E(z - z) = E(0) = 1 \qquad (\text{مختلط } z). \tag{27}$$

این نشان می‌دهد که به‌ازای هر z ، $E(z) \neq 0$. بر طبق (۲۵) ، اگر $x > 0$ ، $E(x) > 0$. پس (۲۷) نشان می‌دهد که به ازای هر x حقیقی $E(x) > 0$. مطابق (۲۵) ، وقتی $x \to +\infty$ ، $E(x) \to +\infty$. درنتیجه ، (۲۷) نشان خواهد داد که وقتی x در امتداد محور حقیقی به $-\infty$ میل کند ، $E(x) \to 0$. بنابر (۲۵) ، $0 < x < y$ ایجاب می‌کند که $E(x) < E(y)$. از این ، بخاطر (۲۷) ، نتیجه خواهد شد که $E(-y) < E(-x)$. پس E بر تمام محور حقیقی اکیدا" صعودی است .

فرمول جمع همچنین نشان می‌دهد که

$$\lim_{h=0} \frac{E(z+h)-E(z)}{h} = E(z) \lim_{h=0} \frac{E(h)-1}{h} = E(z). \tag{28}$$

تساوی آخر مستقیما" از (۲۵) به دست می‌آید .

از تکرار (۲۶) نتیجه می‌شود که

$$E(z_1 + \cdots + z_n) = E(z_1) \cdots E(z_n). \tag{29}$$

حال z_1 ، . . . ، z_n را برابر ۱ می‌گیریم . چون $E(1) = e$ ، که در آن e عدد معرفی شده در تعریف ۳۰۰۳ است ، خواهیم داشت

$$E(n) = e^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{30}$$

هرگاه $p = n/m$ ، که در آن n و m صحیح و مثبت هستند ، آنگاه

$$[E(p)]^m = E(mp) = E(n) = e^n . \tag{31}$$

پس

$$E(p) = e^p \quad (p > 0, p \text{ گویا}). \tag{32}$$

از (۲۷) نتیجه می‌شود که که اگر p مثبت و گویا باشد ، $E(-p) = e^{-p}$. لذا ، (۳۲) به ازای هر p ی گویا برقرار است .

در تمرین ۶ ، فصل ۱ ، تعریف

$$x^y = \sup x^p \tag{33}$$

را پیشنهاد کردیم که در آن sup روی تمام p های گویایی که $p < y$ گرفته می‌شود ، y حقیقی و دلخواه است ، و $x > 1$. لذا ، اگر به ازای هر x حقیقی تعریف کنیم

$$e^x = \sup e^p \qquad (p < x, p \text{ گویا}) \tag{34}$$

خواص پیوستگی و یکنوایی E همراه با (۳۲) نشان خواهند داد که به ازای هر x حقیقی

$$E(x) = e^x. \tag{35}$$

معادلهٔ (۳۵) دلیل اینکه چرا E تابع نمایی نامیده شده توضیح می‌دهد .

نماد $\exp(x)$ اغلب ، بویژه وقتی x عبارت پیچیده‌ای است ، به جای e^x به کار می‌رود .

درواقع ، شخص می‌تواند (۳۵) را نیز ، به جای (۳۴) ، به عنوان تعریف e^x به کار برد . (۳۵) نقطهٔ شروع بسیار شایسته‌تری برای بررسی خواص e^x است . بزودی خواهیم دید که (۳۳) را نیز می‌توان با تعریف مناسب‌تری عوض کرد [ر.ک. (۴۳)] .

حال به نماد متداول e^x ، به جای $E(x)$ ، بازگشته آنچه را که تاکنون ثابت کرده‌ایم خلاصه می‌کنیم .

۸.۶ قضیه. *فرض کنیم e^x بر R^1 با (۳۵) و (۲۵) تعریف شده باشد . در این صورت ،*

(آ) e^x به ازای هر x پیوسته و مشتقپذیر است ؛

(ب) $(e^x)' = e^x$ ؛

(پ) e^x یک تابع اکیداً " صعودی از x است و $e^x > 0$ ؛

(ت) $e^{x+y} = e^x e^y$ ؛

(ث) وقتی $x \to +\infty$ ، $e^x \to +\infty$ و ، وقتی $x \to -\infty$ ، $e^x \to 0$ ؛

(ج) به ازای هر n ، $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$.

برهان. ما قبلاً " (آ) تا (ث) را ثابت کرده‌ایم . رابطهٔ (۲۵) نشان می‌دهد که به ازای $x > 0$ ،

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

در نتیجه،

$$x^n e^{-x} < \frac{(n+1)!}{x},$$

و (ج) به دست می‌آید . قسمت (ج) نشان می‌دهد که وقتی $x \to +\infty$ ، e^x از هر توانی از x "سریعتر" به $+\infty$ میل می‌کند .

چون E بر R^1 اکیداً " صعودی و مشتقپذیر است ، تابع معکوسی مانند L هست که این نیز اکیداً " صعودی و مشتقپذیر است و قلمروش $E(R^1)$ ، یعنی مجموعهٔ تمام اعداد مثبت ، می‌باشد . با L .

$$E(L(y)) = y \qquad (y > 0) \tag{36}$$

یا ، به عبارت معادل ، با

$$L(E(x)) = x \quad (\text{حقیقی } x) \tag{37}$$

تعریف می‌شود . با مشتقگیری از (۳۷) خواهیم داشت (قس. قضیهٔ ۵۰۵)

$$L'(E(x)) \cdot E(x) = 1.$$

این ، اگر بنویسیم $y = E(x)$ ، به ما خواهد داد

$$L'(y) = \frac{1}{y} \qquad (y > 0). \tag{38}$$

با اختیار $x = 0$ در (۳۷) می‌بینیم کـه $L(1) = 0$. لذا ، (۳۸) ایجاب خواهد کرد که

$$L(y) = \int_1^y \frac{dx}{x}. \tag{39}$$

اغلب اوقات (۳۹) را نقطهٔ شـروع نظـریهٔ لـگاریتم و تابع نمایی می‌گیرند . چنانچـه بنویسیم $u = E(x)$ و $v = E(y)$ ، (۲۶) نتیجه می‌دهد که

$$L(uv) = L(E(x) \cdot E(y)) = L(E(x + y)) = x + y,$$

پس

$$L(uv) = L(u) + L(v) \qquad (u > 0, v > 0). \tag{40}$$

این نشان می‌دهد که L خاصیت‌آشنایی دارد که این خاصیت لگاریتمها را ابزارهای مفیدی در محاسبه می‌سازد . البته ، نماد معمول برای $L(x)$ ، $\log x$ خواهد بود .

در مورد رفتار $\log x$ وقتی $x \to +\infty$ و $x \to 0$ ، قضیهٔ ۶۰۸ (ث) نشان می‌دهد که

وقتی $x \to +\infty$ ، $\log x \to +\infty$ ؛

وقتی $x \to 0$ ، $\log x \to -\infty$.

به آسانی می‌بینیم که اگر $x > 0$ و n عددی صحیح باشد ،

$$x^n = E(nL(x)). \tag{41}$$

بهمین نحو ، اگر m عدد صحیح مثبتی باشد ، داریم

$$x^{1/m} = E\left(\frac{1}{m} L(x)\right), \tag{42}$$

زیرا هر جملهٔ (۴۲) ، وقتی به توان m برسد ، جملهٔ متناظر (۳۷) را می‌دهد . با تلفیق (۴۱) و (۴۲) ، به ازای هر α ی گویا خواهیم داشت

$$x^\alpha = E(\alpha L(x)) = e^{\alpha \log x} \cdot \tag{43}$$

حال x^α را به‌ازای‌هر α ی‌حقیقی و هر $x > 0$ با (۴۳) تعریف می‌کنیم . پیوستگی و یکنوایی E و L نشان می‌دهندکه این‌تعریف و تعریف پیشنهادی قبلی به یک نتیجه ختم می‌شوند . احکام ذکر شده در تمرین ۶، فصل ۱، نتایج بدیهی (۴۳) می‌باشند .

اگر از (۴۳) مشتق بگیریم ، بنابر قضیهٔ ۵.۵ خواهیم داشت

$$(x^\alpha)' = E(\alpha L(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1} \cdot \tag{44}$$

توجه دارید که ما قبلاً (۴۴) را فقط برای مقادیرصحیح α به کار برده‌ایم ، که در این حالت (۴۴) به آسانی ازقضیهٔ ۳.۵ (ب) نتیجه می‌شود .اثبات (۴۴) مستقیماً از تعریف مشتق ، در حالتی که x^α با (۳۳) تعریف شده‌و α گنگ باشد ، کار پرزحمتی خواهد بود .

فرمول معروف انتگرالگیری‌از x^α ، اگر $\alpha \neq -1$ ، از (۴۴) و، چنانچه $\alpha = -1$ ، از (۳۸) نتیجه می‌شود . می‌خواهیم یکی دیگر از خواص $\log x$ ، یعنی

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-\alpha} \log x = 0 \tag{45}$$

به ازای هر $\alpha > 0$ ، را نیز ثابت، کنیم . یعنی ، ثابت کنیم $\log x$ ،وقتی $x \to +\infty$ ، از هر توان مثبت x "کندتر" به$+\infty$میل می‌کند .

گوییم هرگاه $0 < \varepsilon < \alpha$ و $x > 1$ ، آنگاه

$$x^{-\alpha} \log x = x^{-\alpha} \int_1^x t^{-1}\, dt < x^{-\alpha} \int_1^x t^{\varepsilon - 1}\, dt$$
$$= x^{-\alpha} \cdot \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon} < \frac{x^{\varepsilon - \alpha}}{\varepsilon},$$

و (۴۵) نتیجه خواهد شد . می‌توانستیم از قضیهٔ ۶.۸ (ج) نیز برای رسیدن به (۴۵) استفاده نماییم .

توابع مثلثاتی

تعریف می‌کنیم

$$C(x) = \frac{1}{2}[E(ix) + E(-ix)], \qquad S(x) = \frac{1}{2i}[E(ix) - E(-ix)] \cdot \tag{46}$$

نشان می‌دهیم که $C(x)$ و $S(x)$ با توابع $\cos x$ و $\sin x$ ، که تعریفشان معمولاً بر ملاحظات هندسی استوار است ، یکی می‌باشند . گوییم ، بنابر (۲۵) ، $E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$.

درنتیجه، (۴۶) نشان می‌دهد که $C(x)$ و $S(x)$ به ازای x های حقیقی حقیقی هستند . همچنین،

$$E(ix) = C(x) + iS(x). \tag{47}$$

پس، اگر x حقیقی باشد، $C(x)$ و $S(x)$ بترتیب قسمتهای حقیقی و موهومی $E(ix)$ خواهند بود . بنابر (۲۷)،

$$|E(ix)|^2 = E(ix)\overline{E(ix)} = E(ix)E(-ix) = 1.$$

درنتیجه،

$$|E(ix)| = 1 \qquad (\text{حقیقی } x). \tag{48}$$

از (۴۶) می‌توان دریافت که $C(0) = 1$ ، $S(0) = 0$ ، و (۲۸) نشان خواهد داد که

$$C'(x) = -S(x), \qquad S'(x) = C(x). \tag{49}$$

حکم می‌کنیم که اعداد مثبتی مثل x هستند بطوری که $C(x) = 0$. زیرا فرض کنیم این طور نباشد . چون $C(0) = 1$ ، نتیجه می‌شود که به ازای هر $x > 0$ ، $C(x) > 0$. درنتیجه، بنابر (۴۹)، $S'(x) > 0$. لذا، S اکیدا" صعودی می‌باشد .وچون $S(0) = 0$ ، اگر $x > 0$ ، داریم $S(x) > 0$. بنابراین،اگر $0 < x < y$، خواهیم داشت

$$S(x)(y-x) < \int_x^y S(t)\,dt = C(x) - C(y) \le 2. \tag{50}$$

آخرین نامساوی از (۴۸) و (۴۷) نتیجه می‌شود . چون $S(x) > 0$ ، نامساوی (۵۰) نمی‌تواند به ازای y های بزرگ درست باشد ، و ما تناقض خواهیم داشت .

فرض‌کنیم x_0 کوچکترین عدد مثبتی باشد که $C(x_0) = 0$. این عدد وجود دارد ، زیرا مجموعهٔ صفرهای یک تابع پیوسته بسته است،و $C(0) \neq 0$. ما عدد π را با

$$\pi = 2x_0 \tag{51}$$

تعریف می‌کنیم .

در این صورت ، $C(\pi/2) = 0$ ، و (۴۸) نشان می‌دهد که $S(\pi/2) = \pm 1$. چون $C(x) > 0$ در $(0, \pi/2)$ ، S در $(0, \pi/2)$ صعودی است.پس $S(\pi/2) = 1$. لذا،

$$E\left(\frac{\pi i}{2}\right) = i,$$

و فرمول جمع نتیجه می‌دهد که

$$E(\pi i) = -1, \qquad E(2\pi i) = 1. \tag{52}$$

بنابراین،

$$E(z + 2\pi i) = E(z) \quad (\text{مختلط } z). \tag{53}$$

۸.۷ قضیه

(آ) تابع E متناوب با دورهٔ تناوب $2\pi i$ است.

(ب) توابع C و S متناوب با دورهٔ تناوب 2π اند.

(پ) هرگاه $0 < t < 2\pi$، آنگاه $E(it) \neq 1$.

(ت) هرگاه z عددی مختلط با $|z| = 1$ باشد، t ی منحصربفردی در $[0, 2\pi)$ هست که $E(it) = z$.

برهان. (آ)، بنابر (۵۳)، برقراراست؛ و (ب) از (آ) و (۴۶) نتیجه می‌شود.

فرض‌کنیم $0 < t < \pi/2$، و $E(it) = x + iy$ که‌در آن x و y حقیقی‌اند. آنچه قبلاً شد نشان می‌دهد که $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$. توجه کنید که

$$E(4it) = (x + iy)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4ixy(x^2 - y^2).$$

اگر $E(4it)$ حقیقی باشد، نتیجه می‌شود که $x^2 - y^2 = 0$. و چون $x^2 + y^2 = 1$، بنابر (۴۸) داریم $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$. درنتیجه، $E(4it) = -1$. این (پ) را ثابت می‌کند.

هرگاه $0 \le t_1 < t_2 < 2\pi$، آنگاه، بنابر (پ)،

$$E(it_2)[E(it_1)]^{-1} = E(it_2 - it_1) \neq 1.$$

این حکم یکتایی مذکور در (ت) را ثابت می‌کند.

برای اثبات حکم وجودی (ت)، z را ثابت می‌گیریم بنحوی که $|z| = 1$. می‌نویسیم $z = x + iy$ که در آن x و y حقیقی‌اند. ابتدا فرض می‌کنیم $x \ge 0$ و $y \ge 0$. بر $[0, \pi/2]$، C از 1 تا 0 نزول می‌کند. پس به‌ازای t ای در $[0, \pi/2]$، $C(t) = x$. چون $C^2 + S^2 = 1$ و $S \ge 0$ بر $[0, \pi/2]$، نتیجه خواهد شد که $z = E(it)$.

اگر $x < 0$ و $y \ge 0$، شرایط قبلی به‌وسیلهٔ $-iz$ برقرار می‌شوند. در نتیجه، به ازای t ای در $[0, \pi/2]$، $-iz = E(it)$. و چون $i = E(\pi i/2)$، خواهیم

داشت $z = E(i(t+\pi/2))$. بالاخره، اگر $y < 0$ ، دو حالت قبلی نشان می‌دهند که به ازای t ای در $(0, \pi)$ ، $-z = E(it)$. بنابراین،

$$z = -E(it) = E(i(t+\pi)).$$

این (ت) را ثابت می‌کند ؛ و درنتیجه، قضیه به اثبات خواهد رسید .

از (ت) و (۴۸) نتیجه می‌شود که منحنی γ تعریف شده با

$$\gamma(t) = E(it) \qquad (0 \le t \le 2\pi) \tag{54}$$

یک منحنی بستهٔ ساده است که بردش دایرهٔ یکه در صفحه می‌باشد . چون $\gamma'(t) = iE(it)$ ، بنابر قضیهٔ ۶۰۲۷، طول γ برابر

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = 2\pi$$

خواهد بود . البته، انتظار این نتیجه برای محیط دایره‌ای به شعاع یک از قبل می‌رفت . این نتیجه نشان می‌دهد که π ، که با (۵۱) تعریف شده، معنی هندسی عادی خود را دارد .

بهمین نحو، مشاهده می‌کنیم که نقطهٔ $\gamma(t)$ ، وقتی t از 0 تا t_0 صعود کند، یک قوس مستدیر به طول t_0 را وصف می‌کند . با توجه به مثلثی که رئوسش

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = \gamma(t_0), \qquad z_3 = C(t_0)$$

اند، معلوم می‌شود که $C(t)$ و $S(t)$) واقعاً" با $\cos t$ و $\sin t$ (اگر اینها طبق معمول به صورت نسبتهای اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تعریف شوند) یکی هستند .

لازم است تأکید کنیم که ما خواص اساسی توابع مثلثاتی را از (۴۶) و (۲۵)، بی توسل به مفهوم هندسی زاویه، نتیجه گرفتیم . راههای غیرهندسی دیگری نیز برای رسیدن به این توابع وجود دارند[1] .

تمامیت جبری میدان مختلط

حال در وضعی هستیم که می‌توانیم برای این مطلب که میدان مختلط به طور جبری تام

۱. درمقالاتی که

W. F. Eberlein (*Amer. Math. Monthly*, vol. 74, 1967, pp. 1223–1225)

و

G. B. Robison (*Math. Mag.*, vol. 41, 1968, pp. 66–70)

نوشته‌اند به این موضوعات پرداخته شده است .

است ، یعنی هرچندجمله‌ای غیرثابت باضرایب مختلط ریشه‌ای مختلط دارد ، برهانی ساده بیاوریم .

۸۰۸ قضیه. فرض کنیم $a_0, \ldots, a_n$ اعدادی مختلط باشند ، $n \geq 1$ ، $a_n \neq 0$ ، و

$$P(z) = \sum_0^n a_k z^k.$$

در این صورت ، به ازای عدد مختلطی چون z ، $P(z) = 0$.

برهان. بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود فرض می‌کنیم $a_n = 1$. قرار می‌دهیم

$$\mu = \inf |P(z)| \qquad (\text{مختلط } z). \tag{55}$$

هرگاه $|z| = R$ ، آنگاه

$$|P(z)| \geq R^n[1 - |a_{n-1}|R^{-1} - \cdots - |a_0|R^{-n}]. \tag{56}$$

طرف راست (۵۶) ، وقتی $R \to \infty$ ، به ∞ میل می‌کند . ازاینرو ، R_0 ی هست بطوری که اگر $|z| > R_0$ ، $|P(z)| > \mu$. چون $|P|$ بر قرص بسته به مرکز 0 و شعاع R_0 پیوسته است ، قضیهٔ ۱۶۰۴ نشان می‌دهد که به ازای z_0 ی $|P(z_0)| = \mu$.

حکم می‌کنیم که $\mu = 0$.

گوییم اگر چنین نباشد ، قرار می‌دهیم $Q(z) = P(z + z_0)/P(z_0)$.

در این صورت ، Q یک چندجمله‌ای غیر ثابت است ، $Q(0) = 1$ ، و ، به ازای هر z ، $|Q(z)| \geq 1$. کوچکترین عدد صحیح k هست ، که $1 \leq k \leq n$ ، بطوری که

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \cdots + b_n z^n, \qquad b_k \neq 0. \tag{57}$$

بنابر قضیهٔ ۷۰۸ (ت) ، θ ای حقیقی وجود دارد بقسمی که

$$e^{ik\theta} b_k = -|b_k|. \tag{58}$$

اگر $r > 0$ و $r^k|b_k| < 1$ ، (۵۸) ایجاب می‌کند که

$$|1 + b_k r^k e^{ik\theta}| = 1 - r^k|b_k|.$$

در نتیجه ،

$$|Q(re^{i\theta})| \leq 1 - r^k\{|b_k| - r|b_{k+1}| - \cdots - r^{n-k}|b_n|\}.$$

عبارت داخل دو ابرو به ازای r به قدر کافی کوچک مثبت است؛ درنتیجه ، $|Q(re^{i\theta})| < 1$ که یک تناقض می‌باشد .

لذا، $\mu = 0$؛ یعنی، $P(z_0) = 0$.

تمرین ۲۷ شامل نتیجهٔ کلیتری خواهد بود.

سریهای فوریه[1]

۹۰۸ تعریف. یک **چندجملهای مثلثاتی** مجموعی است متناهی به شکل

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (\text{حقیقی } x) \tag{59}$$

که در آن $a_0, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ اعداد مختلطی میباشند. نظر به اتحادهای (۴۶)، (۵۹) را میتوان به شکل

$$f(x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} \quad (\text{حقیقی } x) \tag{60}$$

نیز نوشت، که برای اغلب مقاصد مناسبتر است. واضح است که هرچندجملهای مثلثاتی متناوب و دورهٔ تناوبش 2π میباشد.

چناچه n عدد صحیح ناصفری باشد، e^{inx} مشتق e^{inx}/in است، که این نیز دورهٔ تناوب 2π دارد. لذا،

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, dx = \begin{cases} 1 & (\text{اگر } n = 0), \\ 0 & (\text{اگر } n = \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases} \tag{61}$$

حال رابطهٔ (۶۰) را در e^{-imx}، که در آن m عدد صحیحی است، ضرب میکنیم. اگر از این حاصل ضرب انتگرال بگیریم، (۶۱) نشان خواهد داد که به ازای $|m| \le N$

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx}\, dx. \tag{62}$$

چنانچه $|m| > N$، انتگرال مذکور در (۶۲) مساوی 0 است.

مطلب زیر را میتوان از روی (۶۰) و (۶۲) دریافت: چندجملهای مثلثاتی f، که با (۶۰) داده شده، حقیقی است اگر و فقط اگر به ازای $n = 0, \ldots, N$، $c_{-n} = \bar{c}_n$.

موافق با (۶۰)، یک **سری مثلثاتی** را سریی به شکل

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (\text{حقیقی } x) \tag{63}$$

تعریف میکنیم. مجموع جزئی N م (۶۳) مساوی سمت راست (۶۰) تعریف میشود.

هرگاه f یک تابع انتگرالپذیر بر $[-\pi, \pi]$ باشد، اعداد c_m را که به ازای تمام

1. Fourier

اعداد صحیح m با (۶۲) تعریف می‌شوند **ضرایب فوریهٔ** f خوانده، سری (۶۳) را که با این ضرایب شکل می‌گیرد **سری فوریهٔ** f می‌نامند.

سؤالی که اینک به طور طبیعی مطرح می‌شود این است که آیا سری فوریهٔ f همگرا به f هست، یا، بطور کلی، آیا f با سری فوریه‌اش مشخص خواهد شد؛ به این معنی که اگر ضرایب فوریهٔ یک تابع بر ما معلوم باشد، آیا می‌توانیم تابع را پیدا کنیم، و اگر چنین است، چگونه؟

بررسی این سریها و، بخصوص، مسئلهٔ نمایش یک تابع داده شده با یک سری مثلثاتی، ریشه در مسائل فیزیکی مانند نظریهٔ نوسانات و نظریهٔ انتقال حرارت ("نظریهٔ تحلیلی حرارت[1]" فوریه در ۱۸۲۲ منتشر شد) دارد. مسائل مشکل و ظریف زیادی که حین این بررسی پدید آمدند موجب آن شدند که تمام نظریهٔ توابع یک متغیر حقیقی تجدید نظر و تجدید سازمان کامل یابد. در میان نامهای مشهور بسیار، اسامی ریمان، کانتور، و لبگ[2] عمیقاً " به این مبحث وابسته‌اند، مبحثی که امروزه با تمام تعمیمها و انشعابهایش می‌توان گفت که در قلب تمام آنالیز جای دارد.

ما به اثبات چند قضیهٔ اساسی که با روشهای آمده در فصلهای پیش قابل حصولند قناعت می‌کنیم. برای بررسیهای جامعتر، انتگرال لبگ وسیله‌ای طبیعی و لازم خواهد بود.

ابتدا دستگاهای توابع کلیتری را که از خاصیتی شبیه به (۶۱) برخوردارند مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱۰۰۸ تعریف. فرض کنیم $\{\phi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ دنباله‌ای از توابع مختلط بر $[a, b]$ باشد بطوری که

$$\int_a^b \phi_n(x)\overline{\phi_m(x)}\,dx = 0 \qquad (n \neq m). \tag{64}$$

در این صورت، $\{\phi_n\}$ یک **دستگاه متعامد از توابع** بر $[a, b]$ نامیده می‌شود. اگر، علاوه بر این، به ازای هر n،

$$\int_a^b |\phi_n(x)|^2\,dx = 1, \tag{65}$$

$\{\phi_n\}$ **متعامدیکه** نام خواهد داشت.

به عنوان مثال، تابعهای $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{inx}$ یک دستگاه متعامدیکه بر $[-\pi, \pi]$ تشکیل می‌دهند. همچنین است توابع حقیقی

---

1. Theorie analytique de la chaleur

2. Lebesgue

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots$$

اگر $\{\phi_n\}$ بر $[a, b]$ متعامدیکه باشد و

$$c_n = \int_a^b f(t)\overline{\phi_n(t)}\,dt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{66}$$

c_n را ضریب فوریهٔ n م f نسبت به $\{\phi_n\}$ می‌خوانیم. می‌نویسیم

$$f(x) \sim \sum_1^\infty c_n \phi_n(x), \tag{67}$$

و این سری را سری فوریهٔ f (نسبت به $\{\phi_n\}$) خواهیم نامید.

توجه‌کنید که علامت ~ به کار رفته در (۶۷) چیزی در مورد همگرایی سری به دست نمی‌دهد. علامت فقط این را می‌گوید که ضرایب با (۶۶) داده شده‌اند.

قضایای زیر نشان می‌دهند که مجموعهای جزئی سری فوریهٔ f از یک خاصیت مینیمم برخوردارند. در اینجا و تا پایان این فصل فرض می‌کنیم $f \in \mathscr{R}$ اگر چه این فرض را می‌شود ضعیفتر هم کرد.

۱۱۰۸ قضیه. فرض کنیم $\{\phi_n\}$ بر $[a, b]$ متعامدیکه باشد. همچنین،

$$s_n(x) = \sum_{m=1}^n c_m \phi_m(x) \tag{68}$$

مجموع جزئی n م سری فوریهٔ f باشد و

$$t_n(x) = \sum_{m=1}^n \gamma_m \phi_m(x). \tag{69}$$

در این صورت،

$$\int_a^b |f - s_n|^2\,dx \le \int_a^b |f - t_n|^2\,dx, \tag{70}$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر

$$\gamma_m = c_m \qquad (m = 1, \ldots, n). \tag{71}$$

یعنی، در میان تمام توابع t_n ، s_n بهترین تقریب میانگین مربعی ممکن به f را به دست می‌دهند.

برهان. فرض کنیم $\int$ انتگرال روی $[a, b]$ و Σ مجموع از 1 تا n را نشان دهد. در این صورت، بنابر تعریف $\{c_m\}$،

$$\int f\bar{t}_n = \int f\sum \bar{\gamma}_m\bar{\phi}_m = \sum c_m\bar{\gamma}_m.$$

چون $\{\phi_m\}$ متعامدیکه است،

$$\int |t_n|^2 = \int t_n\bar{t}_n = \int \sum \gamma_m\phi_m \sum \bar{\gamma}_k\bar{\phi}_k = \sum |\gamma_m|^2;$$

و درنتیجه،

$$\begin{aligned}\int |f-t_n|^2 &= \int |f|^2 - \int f\bar{t}_n - \int \bar{f}t_n + \int |t_n|^2\\ &= \int |f|^2 - \sum c_m\bar{\gamma}_m - \sum \bar{c}_m\gamma_m + \sum \gamma_m\bar{\gamma}_m\\ &= \int |f|^2 - \sum |c_m|^2 + \sum |\gamma_m - c_m|^2,\end{aligned}$$

که بوضوح مینیمم است اگر و فقط اگر $\gamma_m = c_m$.

با گذاردن $\gamma_m = c_m$ دراین محاسبات، چون $\int|f-t_n|^2 \geq 0$، خواهیم داشت

$$\int_a^b |s_n(x)|^2\,dx = \sum_1^n |c_m|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2\,dx. \tag{72}$$

۸.۱۲ قضیه. هرگاه $\{\phi_n\}$ **بر** $[a, b]$ **متعامدیکه باشد و**

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x),$$

آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2\,dx. \tag{73}$$

بویژه،

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0. \tag{74}$$

برهان. با فرض $n \to \infty$ در (۷۲) نامساوی (۷۳) را، که **نامساوی بسل**[1] نام دارد، به دست خواهیم آورد.

1. Bessel

۱۳۰۸ سریهای مثلثاتی

از حالا به بعد سر و کارمان فقط با دستگاه مثلثاتی خواهد بود. به f هایی توجه داریم که از دورهٔ تناوب 2π برخوردارند و بر $[-\pi, \pi]$ (و درنتیجه، برهر بازهٔ کراندار) انتگرال ریمان دارند. در این صورت، سری فوریهٔ f سری (۶۳) است که ضرایبش c_n با انتگرال (۶۲) داده می‌شوند، و

$$s_N(x) = s_N(f; x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} \tag{75}$$

مجموع جزئی N م سری فوریهٔ f می‌باشد. در این وضع، نامساوی (۷۲) شکل

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |s_N(x)|^2\, dx = \sum_{-N}^{N} |c_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \tag{76}$$

را خواهد یافت.

برای داشتن عبارتی برای s_N که بیش از (۷۵) انعطاف داشته باشد، **هستهٔ دیریکله**[1] را معرفی می‌کنیم:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin (N + \frac{1}{2})x}{\sin (x/2)}. \tag{77}$$

اولین تساوی تعریف $D_N(x)$ است. دومی این طور به دست می‌آید که طرفین اتحاد

$$(e^{ix} - 1) D_N(x) = e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}$$

را در $e^{-ix/2}$ ضرب کنیم.

بنابر (۶۲) و (۷۵) داریم

$$s_N(f; x) = \sum_{-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt\, e^{inx}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{-N}^{N} e^{in(x-t)}\, dt.$$

در نتیجه،

$$s_N(f; x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x - t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) D_N(t)\, dt. \tag{78}$$

متناوب بودن تمام توابع مربوطه نشان می‌دهد که اینکه بر چه بازه‌ای انتگرال می‌گیریم اهمیت ندارد، همین‌قدر که طولش 2π باشد کافی است. این امر نشان می‌دهد که دو

---

1. Dirichlet

انتگرال مذکور در (۷۸) با هم مساوی می‌باشند .
ما در مورد همگرایی نقطه به نقطهٔ سری فوریه فقط یک قضیه ثابت می‌کنیم .

۱۴۰۸ قضیه. هرگاه به‌ازای x ی ثابتهایی چون $0 < \delta$ و $M < \infty$ وجود داشته‌باشند بطوری که برای هر $t \in (-\delta, \delta)$ ،

$$|f(x+t)-f(x)| \le M|t| , \tag{79}$$

آنگاه

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f;x) = f(x). \tag{80}$$

برهان. به ازای $0 < |t| \le \pi$ تعریف می‌کنیم

$$g(t) = \frac{f(x-t)-f(x)}{\sin(t/2)} , \tag{81}$$

و قرار می‌دهیم $g(0) = 0$. بنابر تعریف (۷۷)،

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\, dx = 1.$$

در نتیجه، (۷۸) نشان می‌دهد که

$$s_N(f;x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(t)\cos\frac{t}{2}\right]\sin Nt\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(t)\sin\frac{t}{2}\right]\cos Nt\, dt.$$

بنابر (۷۹) و (۸۱)، $g(t)\cos(t/2)$ و $g(t)\sin(t/2)$ کراندارند . لذا، بر طبق (۷۴)، دو انتگرال آخر وقتی $N\to\infty$ به 0 میل می‌نمایند . این (۸۰) را ثابت خواهد کرد .

نتیجه. هرگاه به ازای هر x در قطعه‌ای چون J ، $f(x) = 0$ ، آنگاه به ازای هر $x \in J$ ، $\lim s_N(f;x) = 0$.

تنظیم دیگری از این نتیجه به صورت زیر است :

هرگاه به ازای هر t در یکی از همسایگیهای x ، $f(t) = g(t)$ ، آنگاه

وقتی $N \to \infty$، $s_N(f; x) - s_N(g; x) = s_N(f-g; x)$.

این را معمولا " قضیهٔ **موضعی‌سازی** می‌خوانند . این قضیه نشان می‌دهد که رفتار دنبالهٔ $\{s_N(f: x)\}$ ، تا جایی که به همگرایی مربوط شود ، فقط به مقادیر f در یکی از همسایگیهای (بدلخواه کوچک) x بستگی دارد . لذا ، دوسری فوریه ممکن است در یک بازه یک نوع رفتار کنند ولی در بازه‌ای دیگر رفتارشان کاملا " فرق داشته باشد . اینجاست که تفاوت بسیار فاحشی میان سریهای فوریه و سریهای توانی وجود خواهد داشت (قضیهٔ ۵۰۸) .

مطلب را با دو قضیهٔ تقریب دیگر به پایان می‌بریم .

۱۵۰۸ قضیه. هرگاه f (با دورهٔ تناوب 2π) پیوسته باشد و $\varepsilon > 0$ ، آنگاه یک چندجمله‌ای مثلثاتی مثل P هست بطوری که به ازای هر x حقیقی

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

برهان. اگر x و $x + 2\pi$ را یکی بگیریم ، می‌توان ، به‌وسیلهٔ نگاشت $x \to e^{ix}$ ، تابعهای 2π متناوب بر R^1 را توابعی بر دایرهٔ یکهٔ T تلقی کرد . چندجمله‌ایهای مثلثاتی ، یعنی توابعی به شکل (۶۰) ، یک جبرخود الحاقی مانند $\mathscr{A}$ را می‌سازند که نقاط T را جدا می‌کند و در هیچ نقطه از T صفر نمی‌شود . چون T فشرده است ، قضیهٔ ۳۳۰۷ به ما می‌گوید که $\mathscr{A}$ در $\mathscr{C}(T)$ چگال است . این همان چیزی است که قضیه حکم می‌کند .

شکل دقیقتر این قضیه در تمرین ۱۵ خواهد آمد .

۱۶۰۸ قضیهٔ پارسوال[1] . فرض کنیم f و g توابعی باشند دارای انتگرال ریمان و دورهٔ تناوب 2π ، و

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}. \tag{82}$$

در این صورت ،

---

1. Parseval

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_N(f;x)|^2\, dx = 0, \tag{83}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \bar{\gamma}_n, \tag{84}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{85}$$

برهان. از نماد

$$\|h\|_2 = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2\, dx\right\}^{1/2} \tag{86}$$

استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون $f \in \mathscr{R}$ و $f(\pi) = f(-\pi)$) ، ساختنی که در تمرین ۱۲، فصل ۶، وصف شد تابع 2π- متناوب و پیوستهٔ h را با

$$\|f - h\|_2 < \varepsilon \tag{87}$$

به دست می‌دهد.

بنابر قضیهٔ ۱۵۰۸، چندجمله‌ای مثلثاتی P هست بطوری که به ازای هر x، $|h(x) - P(x)| < \varepsilon$. لذا، $\|h - P\|_2 < \varepsilon$. اگر درجهٔ P، N_0 باشد، قضیهٔ ۱۱۰۸ نشان خواهد داد که به ازای هر $N \geq N_0$،

$$\|h - s_N(h)\|_2 \leq \|h - P\|_2 < \varepsilon. \tag{88}$$

بنابر (۷۲)، با اختیار $h - f$ به جای f،

$$\|s_N(h) - s_N(f)\|_2 = \|s_N(h - f)\|_2 \leq \|h - f\|_2 < \varepsilon. \tag{89}$$

حال نامساوی مثلثی (تمرین ۱۱، فصل ۶)، در تلفیق با (۸۷)، (۸۸)، و (۸۹)، نشان می‌دهد که

$$\|f - s_N(f)\|_2 < 3\varepsilon \qquad (N \geq N_0). \tag{90}$$

این (۸۳) را ثابت می‌کند. دیگر اینکه،

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_N(f)\bar{g}\, dx = \sum_{-N}^{N} c_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{g(x)}\, dx = \sum_{-N}^{N} c_n \bar{\gamma}_n, \tag{91}$$

و نامساوی شوارتز نشان می‌دهد که

$$\left|\int f\bar{g} - \int s_N(f)\bar{g}\right| \leq \int |f - s_N(f)||g| \leq \left\{\int |f - s_N|^2 \int |g|^2\right\}^{1/2}, \tag{92}$$

که، بنابر (۸۳)، وقتی $N \to \infty$، به 0 میل می‌کند. مقایسهٔ (۹۱) با (۹۲) رابطهٔ (۸۴)

را به دست می‌دهد . بالاخره، (۸۵) حالت خاص (۸۴) به ازای $g=f$ می‌باشد .

صورت کلیتر قضیهٔ ۱۶۰۸ در فصل ۱۱ خواهد آمد .

تابع گاما

این تابع رابطهٔ نزدیکی با فاکتوریلها دارد ، و در بسیاری از جاها در آنالیز بی مقدمه ظاهر می‌شود . منشاء ، تاریخچه ، و گسترش آن در مقالهٔ جالب دیویس[1] بخوبی وصف شده است . کتاب آرتین[2] (مذکور در کتابنامه) معرف مقدماتی خوب دیگری از این تابع خواهد بود .

گفتار ما در این باب خیلی فشرده است ، و فقط پس از هر قضیه چند نکته توضیح می‌شود . از اینرو ، این بخش‌را می‌توان تمرینی طولانی انگاشت و نیز مجالی برای به کارگیری بخشی از مطالب ذکر شده تابحال تلقی نمود .

۱۷۰۸ تعریف . به ازای $0<x<\infty$

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt. \tag{93}$$

انتگرال فوق بـه ازای ایـن x ها همگراست . (وقتی $x<1$ ، هم باید به 0 توجه داشت و هم به ∞ .)

۱۸۰۸ قضیه

(آ) *معادلهٔ تابعی*

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

برقرار است اگر که $0<x<\infty$.

(ب) *به ازای* $n=1, 2, 3, \ldots$ ، $\Gamma(n+1)=n!$.

(پ) $\log\Gamma$ *بر* $(0, \infty)$ *محدب است* .

---

1. P. J. Davis (*Amer. Math. Monthly*, vol. 66, 1959, pp. 849–869).

2. Artin

برهان . انتگرالگیری به‌طریقهٔ جزء به جزء (آ) را ثابت می‌کند . چون $\Gamma(1) = 1$ ، (آ) به استقرا (ب) را ایجاب می‌نماید . اگر $1 < p < \infty$ و $(1/p) + (1/q) = 1$، نامساوی هولدر (تمرین ۱۰ ، فصل ۶) را بر (۹۳) اعمال کرده نتیجه می‌گیریم که

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \le \Gamma(x)^{1/p}\Gamma(y)^{1/q} .$$

این با (پ) معادل خواهد بود .

اینکه این سه خاصیت Γ را کاملا " مشخص می‌کنند موضوع نسبتا " تعجب‌آوری است که توسط بوهر[1] و مالراپ[2] کشف شده است .

۱۹۰۸ قضیه . هرگاه f تابع مثبتی بر $(0, \infty)$ باشد بقسمی که

(آ) $f(x + 1) = xf(x)$ ،

(ب) $f(1) = 1$ ،

(پ) $\log f$ **محدب باشد ،**

آنگاه $f(x) = \Gamma(x)$.

برهان . چون Γ در (آ) ، (ب) ، و (پ) صدق می‌کند ، کافی است ثابت کنیم که $f(x)$ ، به ازای هر $x > 0$ ، به‌طور منحصربفرد به وسیلهٔ (آ) ، (ب) ، و (پ) مشخص می‌شود . بر طبق (آ) ، کافی است این امر به ازای $x \in (0, 1)$ صورت گیرد .

قرار می‌دهیم $\varphi = \log f$. در این صورت ،

$$\varphi(x + 1) = \varphi(x) + \log x \qquad (0 < x < \infty), \tag{94}$$

$\varphi(1) = 0$ ، و φ محدب است . فرض کنیم $0 < x < 1$ و n عدد صحیح مثبتی باشد . بنابر (۹۴) ، $\varphi(n + 1) = \log(n!)$. خارج قسمتهای تفاضلی φ را بر بازه‌های $[n, n + 1]$, $[n + 1, n + 1 + x]$, $[n + 1, n + 2]$ در نظر می‌گیریم . چون φ محدب است ،

$$\log n \le \frac{\varphi(n + 1 + x) - \varphi(n + 1)}{x} \le \log (n + 1) .$$

---

1. Bohr 2. Mollerup

چند بار استفاده از (۹۴) نتیجه می‌دهد که

$$\varphi(n+1+x) = \varphi(x) + \log[x(x+1)\cdots(x+n)] .$$

پس

$$0 \le \varphi(x) - \log\left[\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right] \le x\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

عبارت آخر، وقتی $n \to \infty$ ، به 0 میل می‌کند. لذا، $\varphi(x)$ معین است و برهان تمام خواهد بود.

به عنوان یک نتیجهٔ فرعی، رابطهٔ

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{95}$$

را حداقل وقتی $0 < x < 1$ به دست می‌آوریم. از این رابطه، چون $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ، می‌توان (۹۵) را به ازای هر $x > 0$ نتیجه گرفت.

۲۰۰۸ قضیه. هرگاه $x > 0$ **و** $y > 0$ **، آنگاه**

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{96}$$

این انتگرال ***تابع بتای*** $(B(x,y)$ لقب یافته است.

برهان. توجه کنید که $B(1,y) = 1/y$ ، و $\log B(x,y)$ ، بنابر نامساوی هولدر، مثل قضیهٔ ۱۸۰۸، به ازای هر y ثابت تابع محدبی از x است، و

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y). \tag{97}$$

برای اثبات (۹۷)، انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء را در

$$B(x+1,y) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}\,dt$$

انجام می‌دهیم. این سه خاصیت $B(x,y)$ نشان می‌دهند که، به ازای هر y ، قضیهٔ ۱۹۰۸ در مورد تابع f تعریف شده با

$$f(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} B(x, y)$$

قابل اجراست. درنتیجه، $f(x) = \Gamma(x)$.

۲۱۰۸ چند نتیجه. جانشانی $t = \sin^2 \theta$ ، (۹۶) را به

$$2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} \, d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{98}$$

بدل می‌کند. حالت خاص $x = y = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌دهد که

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \tag{99}$$

جانشانی $t = s^2$ ، (۹۳) را به

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} s^{2x-1} e^{-s^2} \, ds \qquad (0 < x < \infty) \tag{100}$$

تبدیل می‌نماید. حالت خاص $x = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌دهد که

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \, ds = \sqrt{\pi} \cdot \tag{101}$$

بنابر (۹۹)، اتحاد

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \tag{102}$$

مستقیما" از قضیهٔ ۱۹۰۸ نتیجه خواهد شد.

۲۲۰۸ فرمول استرلینگ[1] . این فرمول عبارت تقریبی ساده‌ای را برای $\Gamma(x+1)$ وقتی x بزرگ است (درنتیجه، برای $n!$ وقتی n بزرگ‌است) به دست می‌دهد. فرمول عبارت خواهد بود از

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{(x/e)^x \sqrt{2\pi x}} = 1. \tag{103}$$

اثبات بدین قراراست: در (۹۳) قرارمی‌دهیم $t = x(1+u)$. این نتیجه می‌دهد که

---

1. Stirling

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1}\, e^{-x} \int_{-1}^{\infty} [(1+u)e^{-u}]^x \, du. \tag{104}$$

$h(u)$ را قسمی تعیین می‌کنیم که $h(0)=1$ و، اگر $u \neq 0$ و $-1 < u < \infty$ ،

$$(1+u)e^{-u} = \exp\left[-\frac{u^2}{2} h(u)\right]. \tag{105}$$

در این صورت ،

$$h(u) = \frac{2}{u^2}[u - \log(1+u)]. \tag{106}$$

از این نتیجه می‌شود که h پیوسته است و $h(u)$ ، وقتی u از -1 تا ∞ صعود کند ، از ∞ تا 0 نزول می‌نماید .

جانشانی $u = s\sqrt{2/x}$ رابطهٔ (۱۰۴) را به

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x}\sqrt{2x}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(s)\, ds \tag{107}$$

بدل می‌کند که در آن

$$\psi_x(s) = \begin{cases} \exp[-s^2 h(s\sqrt{2/x})] & (-\sqrt{x/2} < s < \infty), \\ 0 & (s \leq -\sqrt{x/2}). \end{cases}$$

به نکات زیر در باب $\psi_x(s)$ توجه نمایید :

(آ) به ازای هر s ، وقتی $x \to \infty$ ، $\psi_x(s) \to e^{-s^2}$ ؛

(ب) همگرایی در (آ) ، به ازای هر $A < \infty$، بر $[-A, A]$ یکنواخت است ؛

(پ) هرگاه $s < 0$ ، آنگاه $0 < \psi_x(s) < e^{-s^2}$ ؛

(ت) هرگاه $s > 0$ و $x > 1$ ، آنگاه $0 < \psi_x(s) < \psi_1(s)$ ؛

(ث) $\int_0^\infty \psi_1(s)\, ds < \infty$.

لذا ، قضیهٔ همگرایی مذکور در تمرین ۱۲ ، فصل ۷ ، را می‌توان در مورد انتگرال (۱۰۷) بـه کاربرد ، و نشان داد که این انتگرال ، وقتی $x \to \infty$ ، بنا به (۱۰۱) ، به $\sqrt{\pi}$ همگراست . این (۱۰۳) را ثابت خواهد کرد .

شکل مبسوطتر این برهان‌را می‌توان درکتاب "حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفتهٔ" باک[1] یافت . برای مشاهدهٔ دو برهان کاملا" متفاوت دیگر ، ر.ک . مقالهٔ فلر[2] و صفحات

1. R. C. Buck's "Advanced Calculus," pp. 216–218.

2. W. Feller's article in *Amer. Math. Monthly*, vol. 74, 1967, pp. 1223–1225 (with a correction in vol. 75, 1968, p. 518).

۲۰ تا ۲۴ کتاب آرتین.

تمرین ۲۰ برهان ساده‌تری از یک نتیجهٔ کمتر دقیق را به دست خواهد داد.

تمرین

۱. تعریف کنید

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0).\end{cases}$$

ثابت کنید f از هرمرتبه‌در $x=0$ مشتق دارد و، به‌ازای $n=1,2,3,\ldots$، $f^{(n)}(0)=0$.

۲. فرض کنید a_{ij} عددی باشد که در سطر i م و ستون j م آرایهٔ

$$\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & \cdots\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

واقع است؛ یعنی،

$$a_{ij}=\begin{cases} 0 & (i<j),\\ -1 & (i=j),\\ 2^{j-i} & (i>j).\end{cases}$$

ثابت کنید

$$\sum_i\sum_j a_{ij}=-2,\qquad \sum_j\sum_i a_{ij}=0.$$

۳. ثابت کنید که اگر به ازای هر i و j، $a_{ij}\geq 0$، داریم

$$\sum\sum_j a_{ij}=\sum_j\sum_i a_{ij}$$

(حالت $+\infty=+\infty$ نیز ممکن است پیش بیاید).

۴. روابط حدی زیر را ثابت کنید:

(آ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b^x-1}{x}=\log b \qquad (b>0)$؛

(ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$؛

(پ) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$؛

(ت) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

۵ . حدهای زیر را بیابید :

(آ) $\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}$ ؛

(ب) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log n}[n^{1/n}-1]$ ؛

(پ) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x(1-\cos x)}$ ؛

(ت) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan x - x}$.

۶ . فرض کنید به ازای هر x و y حقیقی $f(x)f(y)=f(x+y)$.

(آ) با این انگار که f مشتقپذیر است و صفر نیست ، ثابت کنید

$$f(x)=e^{cx}$$

که در آن c یک ثابت است .

(ب) همین مطلب را با فقط این فرض که f پیوسته است اثبات نمایید .

۷ . هرگاه $0<x<\frac{\pi}{2}$ ، ثابت کنید که

$$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1.$$

۸ . به ازای $n=0,1,2,\ldots$ و x حقیقی ، ثابت کنید که

$$|\sin nx|\le n|\sin x|.$$

توجه کنید که این نامساوی ممکن است برای مقادیر دیگری از n درست نباشد . به عنوان مثال ،

$$|\sin \tfrac{1}{2}\pi| > \tfrac{1}{2}|\sin \pi|.$$

۹ . (آ) قرار دهید $s_N = 1+(\frac{1}{2})+\cdots+(1/N)$. ثابت کنید که

$$\lim_{N\to\infty}(s_N-\log N)$$

وجود دارد . (این حد ، که اغلب با γ نموده می‌شود ، **ثابت اویلر**[1] نام دارد . مقدار عددیش

---

1. Euler

$0.5772...$ است . معلوم نیست که آیا γ گویاست یا نه .)

(ب) حدودا " چقدر باید m بزرگ باشد که $N=10^m$ در $s_N>100$ صدق کند؟

۱۰ . ثابت کنید $\sum 1/p$ واگراست ؛این مجموع روی جمیع اعداد اول گرفته می‌شود .
(این نشان می‌دهد که اعداد اول زیرمجموعهٔ نسبتا " قابل توجهی از مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت را تشکیل می‌دهند .)

راهنمایی : با معلوم بودن N ، فرض کنید $p_1,\ldots,p_k$ اعداداولی‌باشند که لااقل یک عدد صحیح نابیشتر از N را عاد می‌کنند . در این صورت ،

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\le\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_j}+\frac{1}{p_j^2}+\cdots\right)$$
$$=\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)^{-1}$$
$$\le\exp\sum_{j=1}^{k}\frac{2}{p_j}.$$

نامساوی آخر برقرار است ازاینرو که اگر $0\le x\le\frac{1}{2}$ ،

$$(1-x)^{-1}\le e^{2x}\cdot$$

(این نتیجه برهانهای زیادی دارد . به عنوان مثال ، ر.ک. مقالهٔ نیون[1] و مقالهٔ بلمن[2] .)

۱۱ . فرض کنید $f\in\mathscr{R}$ بر $[0,A]$ به‌ازای‌هر $A<\infty$ ،ووقتی $x\to+\infty$ ، $f(x)\to 1$.
ثابت کنید که

$$\lim_{t\to 0} t\int_0^\infty e^{-tx}f(x)\,dx=1\qquad(t>0).$$

۱۲ . فرض کنید $0<\delta<\pi$ ، اگر $|x|\le\delta$ ، $f(x)=1$ ، اگر $\delta<|x|\le\pi$ ، $f(x)=0$ ،
و به ازای هر x ، $f(x+2\pi)=f(x)$.

(آ) ضرایب فوریهٔ f را حساب کنید .

(ب) نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\delta)}{n}=\frac{\pi-\delta}{2}\qquad(0<\delta<\pi).$$

1. I. Niven in *Amer. Math. Monthly*, vol. 78, 1971, pp. 272–273.
2. R. Bellman in *Amer. Math. Monthly*, vol. 50, 1943, pp. 318–319.

(پ) از قضیهٔ پارسوال نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2\delta} = \frac{\pi-\delta}{2}.$$

(ت) فرض کنید $\delta \to 0$ ، و ثابت کنید که

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

(ث) در (پ) قرار دهید $\delta = \pi/2$. چه نتیجه‌ای حاصلتان می‌شود؟

۱۳ . اگر $0 \le x < 2\pi$ ، قرار دهید $f(x) = x$ و ، با استفاده از قضیهٔ پارسوال ، نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

۱۴ . اگر $f(x) = (\pi - |x|)^2$ بر $[-\pi, \pi]$ ، ثابت کنید

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos nx,$$

و نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(مقالهٔ اخیر اشتارک[1] به سریهای از شکل $\sum n^{-s}$ که در آن s عدد صحیح مثبتی است ارجاع بسیار دارد.[2])

۱۵ . با D_n تعریف شده در (۷۷) ، قرار دهید

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(x).$$

ثابت کنید

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1-\cos(N+1)x}{1-\cos x};$$

---

1. E. L. Stark

۲ . ر.ک.

Math. Mag., vol. 47, 1974, pp. 197–202.[1]

و نیز

(آ) $K_N \geq 0$ ،

(ب) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\,dx = 1$ ،

(پ) و اگر $0<\delta\leq|x|\leq\pi$ ، $K_N(x)\leq\frac{1}{N+1}\cdot\frac{2}{1-\cos\delta}$.

با این فرض که $s_N = s_N(f;x)$ مجموع جزئی N م سری فوریهٔ f است، میانگینهای حسابی

$$\sigma_N = \frac{s_0+s_1+\cdots+s_N}{N+1}$$

را در نظر بگیرید . ثابت کنید

$$\sigma_N(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)\,dt\ ;$$

و درنتیجه، قضیهٔ فجر[1] را اثبات نمایید :

هرگاه f پیوسته و با دورهٔ تناوب 2π باشد ،آنگاه $\sigma_N(f;x)\to f(x)$ به طور یکنواخت بر $[-\pi,\pi]$.

راهنمایی : با استفاده از خواص (آ)، (ب)، و (پ)،مثل قضیهٔ ۲۶.۷ عمل کنید.

۱۶ . شکل نقطه به نقطهٔ قضیهٔ فجر را ثابت کنید :

هرگاه $f\in\mathscr{R}$ و $f(x+)$ و $f(x-)$ به ازای x ی موجود باشند، آنگاه

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N(f;x) = \tfrac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]\,.$$

۱۷ . فرض کنید f بر $[-\pi,\pi)$ کراندار و یکنوا بوده و ضرایب c_n فوریه‌اش به صورت (۶۲) باشند .

(آ) از تمرین ۱۷ ،فصل ۶ ،استفاده‌کرده‌ثابت‌نمایید $\{nc_n\}$ یک دنبالهٔ کراندار است .

(ب) قسمت (آ) را با تمرین (۱۶) وتمرین ۱۴ (ث) ،فصل ۳ ،تلفیق کرده نتیجه بگیرید که به ازای هر x ،

---

1. Fejér

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f;x)=\tfrac{1}{2}[f(x+)+f(x-)] .$$

(پ) فقط فرض کنید $f\in\mathscr{R}$ بر $[-\pi,\pi]$ و f در قطعه‌ای چون $(\alpha,\beta)\subset[-\pi,\pi]$ یکنوا باشد. ثابت کنید نتیجهٔ (ب) به ازای هر $x\in(\alpha,\beta)$ برقرار است.
(این کاربردی از قضیهٔ موضعی سازی می‌باشد.)

۱۸ . تعریف کنید

$$f(x)=x^3-\sin^2 x\tan x ,$$
$$g(x)=2x^2-\sin^2 x-x\tan x .$$

درمورد هریک‌ازاین‌دوتابع تحقیق‌کنیدآیابه‌ازای هر $x\in(0,\pi/2)$ مثبت است یا منفی، و یا که تغییر علامت می‌دهد. جواب خود را اثبات نمایید.

۱۹ . فرض کنید f یک‌تابع پیوسته‌بر R^1 باشد، $f(x+2\pi)=f(x)$ ، و α/π گنگ باشد. ثابت کنید به ازای هر x ،

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x+n\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt .$$

راهنمایی: مطلب را ابتدا برای $f(x)=e^{ikx}$ ثابت کنید.

۲۰ . محاسبهٔ سادهٔ زیر تقریب مناسبی را برای فرمول استرلینگ به ما می‌دهد:
به ازای $m=1,2,3,\ldots$ ، اگر $m\le x\le m+1$ ، تعریف کنید

$$f(x)=(m+1-x)\log m+(x-m)\log(m+1)$$

و، اگر $m-\frac{1}{2}\le x<m+\frac{1}{2}$ ، تعریف کنید

$$g(x)=\frac{x}{m}-1+\log m .$$

نمودارهای f و g را بکشید. توجه کنید که اگر $x\ge 1$ ، $f(x)\le\log x\le g(x)$ ؛ و

$$\int_1^n f(x)\,dx=\log(n!)-\tfrac{1}{2}\log n>-\tfrac{1}{8}+\int_1^n g(x)\,dx .$$

از $\log x$ روی $[1,n]$ انتگرال‌گرفته‌نتیجه‌بگیرید که به ازای $n=2,3,4,\ldots$ ،

$$\tfrac{7}{8}<\log(n!)-(n+\tfrac{1}{2})\log n+n<1 .$$

(توجه: $\log\sqrt{2\pi}\sim 0.918\ldots$.) بنابراین،

$$e^{7/8}<\frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{n}}<e .$$

۲۱ . فرض کنید

$$L_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

ثابت کنید عدد ثابتی چون $C > 0$ هست بطوری که

$$L_n > C \log n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

یا ، به عبارت دقیقتر ، دنبالهٔ

$$\left\{L_n - \frac{4}{\pi^2}\log n\right\}$$

کراندار است .

۲۲ . چنانچه α حقیقی باشد و $-1 < x < 1$، قضیهٔ دوجمله‌ای نیوتن را ثابت نمایید :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

راهنمایی : طرف راست را به $f(x)$ نشان دهید . ثابت کنید که سری همگـراست. ثابت کنید

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x),$$

و این معادلهٔ دیفرانسیل را حل کنید . همچنین ، نشان دهید که اگر $-1 < x < 1$ و $\alpha > 0$ ،

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\,\Gamma(\alpha)} x^n .$$

۲۳ . فرض کنید γ یک منحنی **بستهٔ** بـه طور پیوسته مشتقپذیر در صفحهٔ مختلط با بازهٔ پارامتری $[a, b]$ باشد و ، به‌ازای هر $t \in [a, b]$ ، $\gamma(t) \neq 0$. **شاخص** γ را این طور تعریف کنید :

$$\operatorname{Ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt.$$

ثابت کنید $\operatorname{Ind}(\gamma)$ همواره یک عدد صحیح است .

راهنمایی : φ ای بر $[a, b]$ با خواص $\varphi' = \gamma'/\gamma, \varphi(a) = 0$ وجود دارد . درنتیجه ، $\gamma \exp(-\varphi)$ ثابت است . چون $\gamma(a) = \gamma(b)$ ، نتیجه می‌شود که $\exp \varphi(b) = \exp \varphi(a) = 1$ توجه کنید که $\varphi(b) = 2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma)$. $\operatorname{Ind}(\gamma)$ را وقتی $\gamma(t) = e^{int}, a = 0, b = 2\pi$ محاسبه نمایید .

توضیح دهید که چرا اغلب $\mathrm{Ind}\,(\gamma)$ را **عدد گردشی** γ **حول** 0 **می‌نامند**.

۲۴ . فرض کنید γ همان γ ی تمرین ۲۳ باشد و، مضافاً، برد γ قسمت منفی محور حقیقی را قطع نکند. ثابت کنید که $\mathrm{Ind}\,(\gamma)=0$.

راهنمایی: به‌ازای $0\le c<\infty$ ، $\mathrm{Ind}\,(\gamma+c)$ تابعی پیوسته و با مقدار صحیح از c است. همچنین، وقتی $c\to\infty$ ، $\mathrm{Ind}\,(\gamma+c)\to 0$.

۲۵ . فرض کنید γ_1 و γ_2 منحنیهای تمرین ۲۳ باشند و

$$|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)|<|\gamma_1(t)| \qquad (a\le t\le b).$$

ثابت کنید $\mathrm{Ind}\,(\gamma_1)=\mathrm{Ind}\,(\gamma_2)$.

راهنمایی: قرار دهید $\gamma=\gamma_2/\gamma_1$. دراین‌صورت، $|1-\gamma|<1$. درنتیجه، بنابر تمرین ۲۴، $\mathrm{Ind}\,(\gamma)=0$. همچنین،

$$\frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{\gamma_2'}{\gamma_2}-\frac{\gamma_1}{\gamma_1}.$$

۲۶ . فرض کنید γ یک منحنی **بسته** (نه الزاماً مشتقپذیر) در صفحهٔ مختلط و با بازهٔ پارامتری $[0,2\pi]$ باشد بطوری که به ازای هر $t\in[0,2\pi]$ ، $\gamma(t)\neq 0$.

$\delta>0$ را قسمی اختیار کنید که به ازای هر $t\in[0,2\pi]$ ، $|\gamma(t)|>\delta$.

اگر P و P_2 چندجمله‌ایهایی مثلثاتی باشند بطوری که به ازای هر $t\in[0,2\pi]$ $|P_j(t)-\gamma(t)|<\delta/4$ (وجود آنها را قضیهٔ ۱۵۰۸ تضمین می‌کند)، با استفاده از تمرین ۲۵ ثابت کنید

$$\mathrm{Ind}\,(P_1)=\mathrm{Ind}\,(P_2)\cdot$$

این مقدار مشترک را $\mathrm{Ind}\,(\gamma)$ تعریف کنید.

ثابت کنید تمرینهای ۲۴ و ۲۵ بدون فرضی از مشتقپذیری برقرارند.

۲۷ . فرض کنید f یک تابع مختلط پیوسته باشد که در صفحهٔ مختلط تعریف شده است. همچنین، عدد صحیح و مثبت n و عدد مختلط $c\neq 0$ باشند بطوری که

$$\lim_{|z|\to\infty} z^{-n}f(z)=c.$$

ثابت کنید به ازای دست کم یک z مختلط، $f(z)=0$.

توجه دارید که این تعمیمی از قضیهٔ ۸۰۸ است.

راهنمایی: فرض‌کنید درازای هر z ، $f(z)\neq 0$. به‌ازای $0\le r<\infty, 0\le t\le 2\pi$ تعریف کنید

$$\gamma_r(t) = f(re^{it}) \quad \text{و}$$

و احکام زیر را در مورد منحنیهای γ_r ثابت نمایید :

(آ) $\operatorname{Ind}(\gamma_0) = 0$ ؛

(ب) به ازای تمام r های به قدر کافی بزرگ ، $\operatorname{Ind}(\gamma_r) = n$ ؛

(پ) $\operatorname{Ind}(\gamma_r)$ تابع پیوسته‌ای از r بر $[0, \infty)$ است .

[در (ب) و (پ) قسمت آخر تمرین ۲۶ را به کار برید .]

نشان دهید که (آ) و (ب) و (پ) ، چون $n > 0$ ، ضد و نقیض‌اند .

۲۸ . فرض کنید $\bar{D}$ قرص یکهٔ بسته در صفحهٔ مختلط باشد . (پس $z \in \bar{D}$ اگر و فقط اگر $|z| \leq 1$.) g را نگاشت پیوسته‌ای از $\bar{D}$ بتوی دایرهٔ یکهٔ T بینگارید . (بنابراین ، به ازای هر $z \in \bar{D}$ ؛ $|g(z)| = 1$.)

ثابت کنید به ازای دست کم یک $z \in T$ ، $g(z) = -z$.

راهنمایی : به ازای $0 \leq t \leq 2\pi$ و $0 \leq r \leq 1$ قرار دهید

$$\gamma_r(t) = g(re^{it}) \text{ و } \psi(t) = e^{-it}\gamma_1(t) .$$

هرگاه به‌ازای‌هر $z \in T$ ، $g(z) \neq -z$ ، آنگاه به ازای هر $t \in [0, 2\pi]$ ، $\psi(t) \neq -1$.

پس، بنابرتمرینهای ۲۴و۲۶ ، $\operatorname{Ind}(\psi) = 0$. ازاین‌نتیجه‌می‌شودکه $\operatorname{Ind}(\gamma_1) = 1$.

اما $\operatorname{Ind}(\gamma_0) = 0$. حال ، مثل تمرین ۲۷ ، تناقض به دست آورید .

۲۹ . ثابت کنید هر نگاشت پیوستهٔ f از $\bar{D}$ بتوی $\bar{D}$ در $\bar{D}$ نقطهٔ ثابت دارد .

(این حالت دو بعدی قضیهٔ نقطهٔ ثابت بر اوئر[1] است .)

راهنمایی : فرض کنید به‌ازای‌هر $z \in \bar{D}$ ، $f(z) \neq z$. به هر $z \in \bar{D}$ نقطهٔ $g(z) \in T$ راکه‌روی‌شعاع آغازشده از $f(z)$ و ماربر z قراردارد مربوط کنید . در این صورت ، g ، D را بتوی T می‌نگارد ، $g(z) = z$ اگر $z \in T$ ، و g پیوسته است ، زیرا

$$g(z) = z - s(z)[f(z) - z],$$

که‌درآن $s(z)$ ریشهٔ نامنفی منحصربفرد معادلهٔ درجهٔ دومی است که ضرایبش توابع پیوسته‌ای از f و z اند . حال تمرین ۲۸ را به کار گیرید .

1. Brouwer

۹
توابع چند متغیره

تبدیلات خطی

این فصل را بـا بحثی از مجموعه بردارها در فضای اقلیدسی n بعدی R^n آغاز می‌کنیم. مطالب جبری ذکر شده در اینجا را می‌توان بدون ذره‌ای تغییر به فضاهای برداری با بعد متناهی روی هر میدان از اسکالرها تعمیم داد. لکن، برای اهداف ما، چهارچوب مأنوس فضاهای اقلیدسی کاملاً کافی خواهد بود.

۹.۱ چند تعریف

(آ) مجموعهٔ ناتهی $X \subset R^n$ را یک **فضای برداری** نامند هرگاه به ازای هر $\mathbf{x} \in X$، $\mathbf{y} \in X$، و هر اسکالر c، $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in X$ و $c\mathbf{x} \in X$.

(ب) اگر $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in R^n$ و $c_1, \ldots, c_k$ اسکالرهایی باشند، بردار

$$c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$$

یک **ترکیب خطی** از $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ است. چنانچه $S \subset R^n$ و E مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی عناصر S باشد، می‌گوییم S، E را **می‌پیماید** یا که E **پیمای** S است.

ملاحظه کنید که هر پیما یک فضای برداری می‌باشد.

(پ) مجموعهٔ مرکب از بردارهای $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ (برای این مجموعه نماد $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ را به کار می‌بریم) را **مستقل** نامیم هرگاه رابطهٔ $c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k = 0$ ایجاب کند که $c_1 = \cdots = c_k = 0$. در غیر این صورت، $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ را **نامستقل** خواهیم نامید.

توجه دارید که هیچ مجموعهٔ مستقلی شامل بردار پوچ نیست.

(ت) هرگاه فضای برداری X حاوی مجموعهٔ مستقلی از r بردار باشد ولی شامل هیچ مجموعهٔ مستقلی از $r+1$ بردار نباشد، می‌گوییم X **دارای بعد** r است و می‌نویسیم $\dim X = r$.

مجموعه‌ای که فقط از $\mathbf{0}$ تشکیل شده یک فضای برداری است؛ بعدش 0 می‌باشد .

(ث) هر زیر مجموعهٔ مستقل فضای برداری X که X را بپیماید یک **پایه** نام خواهد داشت .

ملاحظه‌کنید که اگر $B = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ پایه‌ای از X باشد، هر $\mathbf{x} \in X$ نمایش منحصر بفردی به شکل $\mathbf{x} = \Sigma c_j \mathbf{x}_j$ دارد. این نمایش موجود است چونکه B، X را می‌پیماید، و منحصر بفرد است زیرا B مستقل می‌باشد. اعداد $c_1, \ldots, c_r$ را **مختصات** $\mathbf{x}$ نسبت به پایهٔ B می‌نامند .

آشناترین نمونهٔ یک پایه مجموعهٔ $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ است که در آن $\mathbf{e}_j$ برداری است در R^n که مختص j اُم آن 1 و سایر مختصاتش همه 0 می‌باشند. هرگاه $\mathbf{x} \in R^n$ و $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$، آنگاه $\mathbf{x} = \Sigma x_j \mathbf{e}_j$. ما

$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$

را **پایهٔ متعارف** R^n خواهیم نامید .

۲۰۹ قضیه. فرض کنیم r عدد صحیح مثبتی باشد. هرگاه فضای برداری X به وسیلهٔ مجموعه‌ای از r بردار پیموده شود، آنگاه $\dim X \le r$.

برهان. اگر این مطلب درست نباشد، فضایی برداری مانند X هست که مجموعهٔ مستقلی چون $Q = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{r+1}\}$ را دربردارد و به وسیلهٔ مجموعه‌ای مانند S_0 مرکب از r بردار پیموده می‌شود .

فرض کنیم $0 \le i < r$ و مجموعهٔ S_i طوری ساخته شده باشد که X را پیموده و از تمام $\mathbf{y}_j$ ها، که $1 \le j \le i$، بعلاوهٔ $r-i$ عضو از S_0، مثلاً $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{r-i}$، تشکیل شده است. (به عبارت دیگر، S_i از S_0 با تعویض i تا عنصر با اعضای Q، بدون تغییر در پیما، به دست می‌آید.) چون S_i، X را می‌پیماید، $\mathbf{y}_{i+1}$ درپیمای S_i قرار دارد. پس اسکالرهایی مثل $a_1, \ldots, a_{i+1}, b_1, \ldots, b_{r-i}$، که $a_{i+1} = 1$، هستند بطوری که

$$\sum_{j=1}^{i+1} a_j \mathbf{y}_j + \sum_{k=1}^{r-i} b_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

اگر همهٔ b_k ها 0 می‌بودند، استقلال Q ایجاب می‌کرد که تمام a_j ها صفر شوند، که یک تناقض است. پس نتیجه می‌شود که $\mathbf{x}_k$ ای در S_i یک ترکیب خطی از اعضای دیگر $T_i = S_i \cup \{\mathbf{y}_{i+1}\}$ می‌باشد. این $\mathbf{x}_k$ را از T_i برمی‌داریم و مجموعهٔ باقی را S_{i+1} می‌نامیم. دراین‌صورت، S_{i+1} همان‌مجموعه‌ای‌که T_i پیموده، یعنی X، را می‌پیماید. درنتیجه، S_{i+1} از خواصی که برای S_i منظور شده، با $i+1$ به جای i، برخوردار است.

بدین‌ترتیب، از S_0 شروع‌کرده مجموعه‌های $S_1, \ldots, S_r$ رامی‌سازیم. آخرین مجموعه از $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r$ تشکیل شده‌است، و طرزساختن نشان می‌دهد که این مجموعه X را می‌پیماید. اما Q مستقل است. پس $\mathbf{y}_{r+1}$ در پیمای S_r قرار ندارد. این تناقض قضیه را به اثبات خواهد رسانید.

نتیجه. $\dim R^n = n$.

برهان. چون $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$، R^n را می‌پیماید، قضیه نشان می‌دهد که $\dim R^n \le n$. و چون $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ مستقل است، $\dim R^n \ge n$.

۳۰۹ قضیه. *فرض کنیم X یک فضای برداری باشد و $\dim X = n$.*

(آ) مجموعهٔ E مرکب از n بردار در X، X را می‌پیماید اگر و فقط اگر E مستقل باشد.

(ب) X دارای پایه است، و هر پایه از n بردار متشکل می‌باشد.

(پ) هرگاه $1 \le r \le n$ و $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$ مجموعهٔ مستقلی در X باشد، آنگاه X پایه‌ای حاوی $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$ دارد.

برهان. فرض کنیم $E = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. چون $\dim X = n$، مجموعهٔ $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}\}$ به ازای هر $\mathbf{y} \in X$ نامستقل است. اگر E مستقل باشد، نتیجه می‌شود که $\mathbf{y}$ در پیمای E قرار دارد. درنتیجه، E، X را خواهد پیمود. بعکس، اگر E نامستقل باشد، یکی از اعضایش را می‌توان بدون تغییر پیمای E حذف کرد. لذا، E، برطبق قضیهٔ ۲۰۹، نمی‌تواند X را بپیماید. این (آ) را ثابت خواهد کرد.

چون $\dim X = n$، X حاوی مجموعهٔ مستقلی مرکب از n بردار است، و (آ) نشان

می‌دهدکه هرچنین‌مجموعه‌ای‌یک پایهٔ X می‌باشد . حال (ب) از ۱۰۹ (ت) و ۲۰۹ نتیجه خواهد شد .

برای اثبات (پ) فرض کنیم $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ پایه‌ای از X باشد . مجموعهٔ

$$S = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$$

X را می‌پیماید ، وناسمتقل‌است زیرا بیش از n بردار دارد . استدلالی که در برهان قضیهٔ ۲۰۹ به‌کاررفت نشان می‌دهدکه یکی‌از $\mathbf{x}_i$ ها ترکیب خطی اعضای دیگر S است . چنانچه این $\mathbf{x}_i$ را از S برداریم ، مجموعهٔ باقی باز هم X را می‌پیماید . این عمل را می‌توان r بار تکرار کرد و ، برطبق (آ) ، به پایه‌ای از X رسید که شامل $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$ باشد .

۴۰۹ **چند تعریف**. نگاشت A ازفضای‌برداری X بتوی‌فضای برداری Y را یک **تبدیل خطی** نامند هرگاه به ازای هر $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ و هر اسکالر c ،

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2, \qquad A(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x}.$$

توجه کنید که اغلب ، در صورت خطی بودن A ، به‌جای $A(\mathbf{x})$ می‌نویسند $A\mathbf{x}$.

ملاحظه‌می‌کنیدکه ، اگر A خطی‌باشد ، $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. همچنین ، توجه دارید که یک تبدیل خطی‌A از‌X بتوی‌Y کاملا "با عملش بر یک پایه مشخص می‌شود : چنانچه $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ یک پایه از X باشد ، هر $\mathbf{x} \in X$ نمایش منحصر بفردی به شکل

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i$$

دارد ، و خطـی بـودن A محاسبهٔ $A\mathbf{x}$ را از بـردارهای $A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n$ و مختصات $c_1, \ldots, c_n$ به وسیلهٔ فرمول

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i A\mathbf{x}_i$$

میسر می‌سازد .

تبدیلات خطی از X بتوی X را اغلب **عملگرهای خطی** بر X می‌نامند .

چنانچه A یک عملگر خطی بر X باشد که (یک) یک به یک بوده و (دو) X را بروی X بنگارد ، می‌گوییم A **معکوسپذیر** است . دراین‌حالت‌می‌توان عملگر A^{-1} را بر X با این قرار که به ازای هر $\mathbf{x} \in X$ ، $A^{-1}(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ تعریف کرد . خیلی ساده تحقیق می‌شود که در این وضع به ازای هر $\mathbf{x} \in X$ ، $A(A^{-1}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ ، و A^{-1} خطی می‌باشد .

مطلب مهم در باب عملگرهای خطی بر فضاهای برداری با بعد متناهی این است که شرطهای (یک) و (دو) فوق مستلزم هم می‌باشند :

۵۰۹ قضیه. عملگر خطی A بر فضای برداری با بعد متناهی X یک به یک است اگر و فقط اگر برد A تمام X باشد.

برهان. فرض کنیم $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ پایه‌ای از X باشد. خطی بودن A نشان می‌دهد که بردش $\mathscr{R}(A)$ پیمای مجموعهٔ $Q = \{A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n\}$ است. پس، از قضیهٔ ۳۰۹ (آ) این استنباط می‌شود که $\mathscr{R}(A) = X$ اگر و فقط اگر Q مستقل باشد. باید ثابت کنیم که این روی خواهد داد اگر و فقط اگر A یک به یک باشد.

فرض کنیم A یک به یک باشد و $\Sigma c_i A\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. در این صورت، $A(\Sigma c_i \mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$. پس $\Sigma c_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. لذا، $c_1 = \cdots = c_n = 0$، و نتیجه می‌گیریم که Q مستقل می‌باشد.

بعکس، فرض کنید Q مستقل باشد و $A(\Sigma c_i \mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$. در این صورت، $\Sigma c_i A\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. پس $c_1 = \cdots = c_n = 0$، و نتیجه می‌شود که $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ فقط اگر $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. حال اگر $A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$، $A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = A\mathbf{x} - A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. درنتیجه، $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$، و این گویای یک به یک بودن A خواهد بود.

۶۰۹ چند تعریف

(آ) فرض کنیم $L(X, Y)$ مجموعهٔ تمام تبدیلات خطی فضای برداری X بتوی فضای برداری Y باشد. به جای $L(X, X)$ فقط خواهیم نوشت $L(X)$. چنانچه $A_1, A_2 \in L(X, Y)$ و c_1, c_2 اسکالرهایی باشند، $c_1A_1 + c_2A_2$ را با

$$(c_1A_1 + c_2A_2)\mathbf{x} = c_1A_1\mathbf{x} + c_2A_2\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in X)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، واضح است که $c_1A_1 + c_2A_2 \in L(X, Y)$.

(ب) اگر X, Y, Z فضاهایی برداری باشند و $A \in L(X, Y)$ و $B \in L(Y, Z)$، **حاصل‌ضرب** آنها BA مساوی ترکیب A و B تعریف می‌شود :

$$(BA)\mathbf{x} = B(A\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in X).$$

در این صورت، $BA \in L(X, Z)$.

توجه دارید که BA لزوما" همان AB نیست حتی اگر $X = Y = Z$.

(پ) به ازای $A \in L(R^n, R^m)$ ، نرم A ، یعنی $\|A\|$ ، راسوپرمم جمیع اعداد $|A\mathbf{x}|$ می‌گیریم که در آنها $\mathbf{x}$ روی تمام بردارها در R^n که $|\mathbf{x}| \le 1$ تغییر می‌کند.

ملاحظه کنید که نامساوی

$$|A\mathbf{x}| \le \|A\| \, |\mathbf{x}|$$

به ازای هر $\mathbf{x} \in R^n$ برقراراست. همچنین، هرگاه λ به این‌صورت باشد که به ازای جمیع $\mathbf{x}$ های متعلق به R^n ، $|A\mathbf{x}| \le \lambda |\mathbf{x}|$ ، آنگاه $\|A\| \le \lambda$.

۷۰۹ قضیه

(آ) هرگاه $A \in L(R^n, R^m)$ ، آنگاه $\|A\| < \infty$ و A یک‌نگاشت به طور یکنواخت پیوسته از R^n بتوی R^m است.

(ب) هرگاه $A, B \in L(R^n, R^m)$ و c یک اسکالر باشد، آنگاه

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|, \qquad \|cA\| = |c| \, \|A\|.$$

$L(R^n, R^m)$ ، اگر فاصلهٔ بین A و B برابر $\|A - B\|$ تعریف‌شود، یک‌فضای متری خواهد بود.

(پ) هرگاه $A \in L(R^n, R^m)$ و $B \in L(R^m, R^k)$ ، آنگاه

$$\|BA\| \le \|B\| \, \|A\|.$$

برهان

(آ) فرض کنیم $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ پایهٔ متعارف در R^n باشد، $\mathbf{x} = \Sigma c_i \mathbf{e}_i$ ، و $|\mathbf{x}| \le 1$. پس، به ازای $i = 1, \ldots, n$ ، $|c_i| \le 1$. در این صورت،

$$|A\mathbf{x}| = \left|\sum c_i A\mathbf{e}_i\right| \le \sum |c_i| \, |A\mathbf{e}_i| \le \sum |A\mathbf{e}_i|.$$

درنتیجه،

$$\|A\| \le \sum_{i=1}^{n} |A\mathbf{e}_i| < \infty.$$

چونکه اگر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ ، $|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}| \le \|A\| \, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ، می‌بینیم که A به‌طوریکنواخت پیوسته می‌باشد.

(ب) نامساوی مذکور در (ب) از

$$|(A + B)\mathbf{x}| = |A\mathbf{x} + B\mathbf{x}| \le |A\mathbf{x}| + |B\mathbf{x}| \le (\|A\| + \|B\|) \, |\mathbf{x}|$$

نتیجه می‌شود . قسمت دوم (ب) به همین نحو ثابت خواهد شد . چنانچه

$$A, B, C \in L(R^n, R^m),$$

نامساوی مثلثی

$$\|A - C\| = \|(A - B) + (B - C)\| \leq \|A - B\| + \|B - C\|$$

را خواهیم داشت ، و به آسانی تحقیق می‌شود که $\|A - B\|$ از سایر خواص یک متر (تعریف ۱۵۰۲) نیز برخوردار است .

(پ) بالاخره ، (پ) از

$$|(BA)\mathbf{x}| = |B(A\mathbf{x})| \leq \|B\| \; |A\mathbf{x}| \leq \|B\| \; \|A\| \; |\mathbf{x}|$$

نتیجه خواهد شد .

حال چون در فضاهای $L(R^n, R^m)$ متر در دست ماست ، مفاهیم مجموعهٔ باز ، پیوستگی ، و غیره در این فضاها معنی دارند . قضیهٔ بعدی از این مفهومها استفاده خواهد کرد .

۸۰۹ قضیه . فرض کنیم Ω مجموعهٔ تمام عملگرهای خطی معکوسپذیر بر R^n باشد .

(آ) هرگاه $A \in \Omega$ ، $B \in L(R^n)$ ، و

$$\|B - A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1,$$

آنگاه $B \in \Omega$.

(ب) Ω یک زیرمجموعهٔ باز $L(R^n)$ است و نگاشت $A \to A^{-1}$ بر Ω پیوسته می‌باشد .

(این نگاشت نیز بوضوح یک نگاشت $1 - 1$ از Ω بروی Ω است که معکوس خود می‌باشد .)

برهان

(آ) قرار می‌دهیم $\|A^{-1}\| = 1/\alpha$ و $\|B - A\| = \beta$. در این صورت ، $\beta < \alpha$. به‌ازای هر $\mathbf{x} \in R^n$ ،

$$\begin{aligned}\alpha|\mathbf{x}| &= \alpha|A^{-1}A\mathbf{x}| \leq \alpha\|A^{-1}\| \cdot |A\mathbf{x}| \\ &= |A\mathbf{x}| \leq |(A - B)\mathbf{x}| + |B\mathbf{x}| \leq \beta|\mathbf{x}| + |B\mathbf{x}| .\end{aligned}$$

در نتیجه ،

$$(\alpha - \beta)|\mathbf{x}| \leq |B\mathbf{x}| (\mathbf{x} \in R^n) . \tag{1}$$

چون $\alpha - \beta > 0$ ، نامساوی (۱) نشان می‌دهد که اگر $\mathbf{x} \neq 0$ ، $B\mathbf{x} \neq 0$. پس B یک به یک خواهد بود . بنابر قضیهٔ ۵۰۹ ، $B \in \Omega$. این رابطه به ازای هر B که $\|B - A\| < \alpha$ برقرار

است. لذا، (آ) و این مطلب که Ω باز است را خواهیم داشت.

(ب) حال $\mathbf{x}$ در (۱) را با $B^{-1}\mathbf{y}$ عوض می‌کنیم. نامساوی حاصل، یعنی

$$(\alpha-\beta)|B^{-1}\mathbf{y}| \le |BB^{-1}\mathbf{y}| = |\mathbf{y}| \qquad (\mathbf{y}\in R^n) \tag{2}$$

نشان می‌دهد که $\|B^{-1}\| \le (\alpha-\beta)^{-1}$. بنابراین، اتحاد

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A-B)A^{-1},$$

در تلفیق با قضیهٔ ۹.۷ (پ)، ایجاب خواهد کرد که

$$\|B^{-1}-A^{-1}\| \le \|B^{-1}\|\ \|A-B\|\ \|A^{-1}\| \le \frac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}.$$

این پیوستگی حکم شده در (ب) را به ثبوت می‌رساند، زیرا وقتی $B\to A$، $\beta\to 0$.

۹.۹ ماتریسها. فرض‌کنیم $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ و $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ بترتیب پایه‌های فضاهای برداری X و Y باشند. در این صورت، هر $A\in L(X, Y)$ مجموعه‌ای از اعداد چون a_{ij} را معین می‌کند به این نحو که

$$A\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{y}_i \qquad (1\le j\le n). \tag{3}$$

مقتضی است که این اعداد در یک آرایهٔ مستطیلی شکل مرکب از m سطر و n ستون، به نام یک ***ماتریس*** m در n، نموده شوند:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

توجه دارید که مختصات a_{ij} بردار $A\mathbf{x}_j$ (نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$) در ستون jام $[A]$ ظاهر می‌شوند. بدین خاطر، گاهی اوقات $A\mathbf{x}_j$ ها را ***بردارهای ستونی*** $[A]$ می‌خوانند. با این اصطلاح، **برد** A به وسیلهٔ ***بردارهای ستونی*** $[A]$ پیموده خواهد شد.

هرگاه $\mathbf{x} = \Sigma c_j\mathbf{x}_j$، خطی بودن A، همراه با (۳)، نشان می‌دهد که

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\right)\mathbf{y}_i. \tag{4}$$

لذا، مختصات $A\mathbf{x}$ عبارت خواهند بود از $\Sigma_j a_{ij}c_j$. توجه دارید که در (۳)

جمعبندی روی زیرنویس اول a_{ij} گرفته می‌شود ،ولی وقتی مختصات حساب می‌شوند ، روی زیرنویس دوم جمع خواهیم کرد .

حال فرض کنیم ماتریس m در n ی با درایه‌های حقیقی a_{ij} داده شده است . دراین صورت ، اگر A با (۴) تعریف شده باشد ، واضح است که $A \in L(X, Y)$ و $[A]$ ماتریس معلوم می‌باشد . پس یک تناظر 1-1 طبیعی بین $L(X, Y)$ و مجموعهٔ تمام ماتریسهای m در n حقیقی وجود دارد . بـا اینحال ، تأکید می‌کنیم که $[A]$ نه فقط به A بلکه به انتخاب پایه در X و Y نیز بستگی دارد . هر A ممکن است در صورت تغییر پایه‌ها ماتریسهای متفاوت بسیار به دست دهد ، و بالعکس. ما این بررسی را بیش از این ادامه نمی‌دهیم ، زیرا معمولاً " با پایه‌های ثابتی کار خواهیم کرد . (دربخش ۳۷۰۹ چند نکته در این باب گفته شده است .)

هرگاه Z سومین فضای برداری با پایهٔ $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_p\}$ بوده ، A با (۳) داده شده باشد ، و

$$B\mathbf{y}_i = \sum_k b_{ki}\mathbf{z}_k, \qquad (BA)\mathbf{x}_j = \sum_k c_{kj}\mathbf{z}_k,$$

آنگاه $A \in L(X, Y),\ B \in L(Y, Z),\ BA \in L(X, Z)$ و ، چون

$$B(A\mathbf{x}_j) = B\sum_i a_{ij}\mathbf{y}_i = \sum_i a_{ij}B\mathbf{y}_i$$

$$= \sum a_{ij}\sum_k b_{ki}\mathbf{z}_k = \sum_k \Big(\sum_i b_{ki}a_{ij}\Big)\mathbf{z}_k,$$

استقلال $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_p\}$ ایجاب خواهد کرد که

$$c_{kj} = \sum_i b_{ki}a_{ij} \qquad (1 \le k \le p,\ 1 \le j \le n). \tag{5}$$

این رابطه طرز محاسبهٔ ماتریس p در n $[BA]$ را از $[B]$ و $[A]$ نشان می‌دهد .هرگاه حاصل ضرب $[B][A]$ را برابر $[BA]$ تعریف‌کنیم ،تساوی (۵) قاعدهٔ معمول ضرب ماتریسها را توصیف خواهد نمود .

بالاخره ، فرض می‌کنیم $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ و $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ پایه‌های متعـارف R^n و R^m باشند و A با (۴) داده شده باشد . نامساوی شوارتز نشان می‌دهد که

$$|A\mathbf{x}|^2 = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij}c_j\Big)^2 \le \sum_i \Big(\sum_j a_{ij}^2 \cdot \sum_j c_j^2\Big) = \sum_{i,j} a_{ij}^2|\mathbf{x}|^2.$$

لذا ،

$$\|A\| \le \left\{\sum_{i,j} a_{ij}^2\right\}^{1/2}. \tag{6}$$

چنانچه‌نامساوی (۶) رادر مورد $B-A$ ، که $A,\ B \in L(R^n, R^m)$ ، به‌جای A به کار بریم ، خواهیم دید که اگر عناصر ماتریسی a_{ij} توابع پیوسته‌ای از یک پـارامتر باشنـد ، همین مطلب در مورد A نیز صادق است . به عبارت دقیقتر :

هرگاه S یک فضای‌متری‌بوده ، $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ توابعی‌حقیقی‌و پیوسته‌بر S باشنـد ، و به ازای هر $p \in S$ ، A_p تبدیلی خطی از R^n بتوی R^m باشد که ماتریسش درایه‌های $a_{ij}(p)$ را دارد ، آنگاه‌نگاشت $p \to A_p$ یک نگاشت‌پیوسته از S بتوی $L(R^n, R^m)$ خواهد بود .

مشتقگیری

۱۰۰۹ مقدمات. برای‌آنکه‌به‌تعریف مشتق یک تابع با قلمرو R^n (و یا زیرمجموعهٔ بازی از R^n)دست یابیم ، به حالت آشنای $n=1$ نظری دیگر افکنده ببینیم مشتق را چگونه تعبیر کنیم که به طور طبیعی به حالت $n>1$ قابل تعمیم باشد .

هرگاه f یک‌تابع حقیقی با قلمرو $(a, b) \subset R^1$ بوده و $x \in (a, b)$ ، $f'(x)$ معمولا" مساوی عدد حقیقی

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{7}$$

تعریف می‌شود ، البته به شرط‌آنکه این حد وجود داشته باشد . بنابراین ،

$$f(x+h)-f(x) = f'(x)h + r(h) \tag{8}$$

که در آن "باقیماندهٔ" $r(h)$ کوچک است به این معنی که

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \tag{9}$$

توجه کنید کـه (۸) تفاضل $f(x+h)-f(x)$ را به صورت مجموع یک **تابع خطی** که h را به $f'(x)h$ می‌برد و یک باقیماندهٔ کوچک بیان می‌دارد .

لذا ، می‌توان مشتق f در x را ، نه به عنوان یک عدد حقیقی ، بلکه به صورت یک عملگر خطی بر R^1 که h را به $f'(x)h$ می‌برد ملحوظ داشت .

[ملاحظه‌کنید که‌هرعدد حقیقی α یک عملگر خطی بر R^1 را به ما می‌دهد . این عملگر چیزی جز ضرب در α نیست . بعکس، هر تابع خطی کـه R^1 را به R^1 ببرد ضرب در عددی

حقیقی خواهد بود. همین تناظر 1-1 طبیعی بین R^1 و $L(R^1)$ است که موجب ذکر مطالب فوق شده است.]

حال تابع $\mathbf{f}$ را در نظر مـی‌گیریم که $(a, b) \subset R^1$ رابتوی R^m می‌نگارد. در این حالت، $\mathbf{f}'(x)$ مساوی بردار $\mathbf{y} \in R^m$ (در صورت وجود) تعریف شده که برای آن

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\mathbf{f}(x+h) - \mathbf{f}(x)}{h} - \mathbf{y} \right\} = 0. \tag{10}$$

ما مجددا" این رابه شکل

$$\mathbf{f}(x+h) - \mathbf{f}(x) = h\mathbf{y} + \mathbf{r}(h) \tag{11}$$

می‌نویسیـم کـه در آن وقتـی $h \to 0$، $\mathbf{r}(h)/h \to 0$. جملهٔ اصلی سمت راست (۱۱) باز یک تابع خطی از h است. هر $\mathbf{y} \in R^m$، با ربط هر $h \in R^1$ به بردار $h\mathbf{y} \in R^m$، تبدیلی خطـی از R^1 بتوی R^m را به دست می‌دهد. این انطباق R^m با $L(R^1, R^m)$ به ما این اجازه که $\mathbf{f}'(x)$ را عضوی از $L(R^1, R^m)$ بدانیم خواهد داد.

لذا، اگر $\mathbf{f}$ نگاشت مشتقپـذیری از $(a, b) \subset R^1$ بتوی R^m بوده و $x \in (a, b)$، $\mathbf{f}'(x)$ تبدیلی خطی از R^1 بتوی R^m است که در

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(x+h) - \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}'(x)h}{h} = 0 \tag{12}$$

یا، معادلا"، در

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\mathbf{f}(x+h) - \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}'(x)h|}{|h|} = 0 \tag{13}$$

صدق می‌کند.

ما اینک برای حالت $n > 1$ حاضر و آماده هستیم.

۹.۱۱ تعریف. فرض‌کنیم E مجموعه‌ای باز در R^n بوده، $\mathbf{f}$ مجموعهٔ E را بتوی R^m بنگارد، و $\mathbf{x} \in E$. هرگاه تبدیلی خطی مانند A از R^n بتوی R^m باشد بطوری که

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = 0, \tag{14}$$

آنگاه می‌گوییم $\mathbf{f}$ در $\mathbf{x}$ مشتقپذیر است و می‌نویسیم

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = A. \tag{15}$$

چنانچه $\mathbf{f}$ در هر $\mathbf{x} \in E$ مشتقپذیر باشد، می‌گوییم **$\mathbf{f}$ در E مشتقپذیر است**.

البته، در (۱۴) فرض این است که $\mathbf{h} \in R^n$. هرگاه $|\mathbf{h}|$ به قدر کافی کوچک باشد، آنگاه، چون E بازاست، $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in E$. پس $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ تعریف شده‌است، $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \in R^m$، و چون $A \in L(R^n, R^m)$، خواهیم داشت $A\mathbf{h} \in R^m$. بنابراین،

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A\mathbf{h} \in R^m.$$

در صورت (۱۴) نرم همان نرم R^m است. در مخرج R^n ـ نرم $\mathbf{h}$ را خواهیم داشت.

مسئلهٔ یکتایی واضحی وجود دارد که باید پیش از هر کار سامان یابد.

۱۲۰۹ قضیه. فرض کنیم E و $\mathbf{f}$ همانهایی باشند که در تعریف ۱۱۰۹ آمده‌اند، $\mathbf{x} \in E$، و (۱۴) به ازای $A = A_1$ و $A = A_2$ برقرار باشد. دراین صورت، $A_1 = A_2$.

برهان. اگر $B = A_1 - A_2$، نامساوی

$$|B\mathbf{h}| \le |\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A_1\mathbf{h}| + |\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A_2\mathbf{h}|$$

نشان می‌دهد که وقتی $\mathbf{h} \to 0$، $|B\mathbf{h}|/|\mathbf{h}| \to 0$. به ازای $\mathbf{h}$ ثابت مخالف $\mathbf{0}$ نتیجه خواهد شد که

$$\text{وقتی} \quad t \to 0 \quad , \quad \frac{|B(t\mathbf{h})|}{|t\mathbf{h}|} \to 0. \tag{16}$$

خطی بودن B نشان می‌دهد که سمت چپ (۱۶) از t مستقل است. لـذا، به ازای هر $\mathbf{h} \in R^n$، $B\mathbf{h} = 0$. بنابراین، $B = 0$.

۱۳۰۹ چند تبصره

(آ) رابطهٔ (۱۴) را می‌شود به شکل

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h} + \mathbf{r}(\mathbf{h}) \tag{17}$$

نوشت که در آن باقیماندهٔ $\mathbf{r}(\mathbf{h})$ در

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{|\mathbf{r}(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} = 0 \tag{18}$$

صدق می‌کند. می‌توان (۱۷) را، مثل بخش ۱۰۰۹، این طور تعبیر کرد که بگوییم سمت چپ آن به ازای $\mathbf{x}$ ثابت و $\mathbf{h}$ کوچک تقریبا" مساوی $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}$ ، یعنی مقدار یک تبدیل خطی در $\mathbf{h}$، است.

(ب) فرض کنیم $\mathbf{f}$ و E همانهای تعریف ۱۱۰۹ باشند و $\mathbf{f}$ در E مشتقپذیر باشد. در این صورت، به ازای هر $\mathbf{x} \in E$ $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ یک تابع، یعنی تبدیلی خطی از R^n بتوی R^m ، است. لکن $\mathbf{f}'$ نیز یک تابع است؛ $\mathbf{f}'$ مجموعهٔ E را بتوی $L(R^n, R^m)$ می‌نگارد.

(پ) نگاهی به (۱۷) معلوم می‌سازد که $\mathbf{f}$ در هر نقطه که مشتقپذیر باشد پیوسته است.

(ت) مشتق تعریف شده با (۱۴) یا (۱۷) را اغلب **دیفرانسیل** $\mathbf{f}$ در $\mathbf{x}$، یا **مشتق کلی** $\mathbf{f}$ در $\mathbf{x}$ نامند تا از مشتقات جزئی که بعدا" می‌آیند ممتاز باشد.

۱۴۰۹ مثال. ما مشتق توابعی که R^n را به R^m می‌برند تبدیلاتی خطی از R^n بتوی R^m تعریف کرده‌ایم. می‌پرسیم مشتق یک چنین تبدیل خطی چیست؟ جواب بسیار ساده خواهد بود.

هرگاه $A \in L(R^n, R^m)$ و $\mathbf{x} \in R^n$ ، آنگاه

$$A'(\mathbf{x}) = A. \tag{19}$$

توجه دارید که $\mathbf{x}$ طرف چپ (۱۹) ظاهر شده ولی سمت راست آن نیامده است. هر دو طرف (۱۹) اعضایی از $L(R^n, R^m)$ هستند حال آنکه $A\mathbf{x} \in R^m$.

برهان (۱۹) واضح است زیرا، بر طبق خطی بودن A،

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - A\mathbf{x} = A\mathbf{h}. \tag{20}$$

لذا، با فرض $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ، صورت کسر (۱۴) به ازای هر $\mathbf{h} \in R^n$ صفر است. در (۱۷)، $\mathbf{r}(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$.

حال قاعدهٔ زنجیره‌ای (قضیهٔ ۵۰۵) را به وضع فعلی تعمیم می‌دهیم.

۱۵۰۹ قضیه. *فرض کنیم E مجموعهٔ بازی در R^n باشد، $\mathbf{f}$ مجموعهٔ E را بتوی R^m بنگارد، $\mathbf{f}$ در $\mathbf{x}_0 \in E$ مشتقپذیر باشد، $\mathbf{g}$ مجموعهٔ بازی شامل $\mathbf{f}(E)$ را بتوی R^k بنگارد، و $\mathbf{g}$ در $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ مشتقپذیر باشد. در این صورت، نگاشت $\mathbf{F}$ از E بتوی R^k که با*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

تعریف شده در $\mathbf{x}_0$ مشتقپذیر است و

$$\text{(21)} \qquad \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) .$$

در طرف راست (۲۱) حاصل ضرب دو تبدیل خطی را ، بصورتی که در بخش ۶۰۹ تعریف شده ، خواهیم داشت.

برهان . قرارمی‌دهیم $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0),\ A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0),\ B = \mathbf{g}'(\mathbf{y}_0)$ ، وبه‌ازای هر $\mathbf{h} \in R^n$ و $\mathbf{k} \in R^m$ که $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$ و $\mathbf{g}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k})$ معین باشند تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{u}(\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A\mathbf{h},$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) - B\mathbf{k} .$$

در این صورت ،

$$\text{(22)} \qquad |\mathbf{u}(\mathbf{h})| = \varepsilon(\mathbf{h})|\mathbf{h}|, \qquad |\mathbf{v}(\mathbf{k})| = \eta(\mathbf{k})|\mathbf{k}|$$

که درآنها وقتی $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ ، $\varepsilon(\mathbf{h}) \to 0$ و ، وقتی $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$ ، $\eta(\mathbf{k}) \to 0$.

چنانچه $\mathbf{h}$ داده شده باشد ، قرار می‌دهیم $\mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

در این صورت ،

$$\text{(23)} \qquad |\mathbf{k}| = |A\mathbf{h} + \mathbf{u}(\mathbf{h})| \le [\|A\| + \varepsilon(\mathbf{h})]\ |\mathbf{h}|$$

و

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - BA\mathbf{h} &= \mathbf{g}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) - BA\mathbf{h}\\ &= B(\mathbf{k} - A\mathbf{h}) + \mathbf{v}(\mathbf{k})\\ &= B\mathbf{u}(\mathbf{h}) + \mathbf{v}(\mathbf{k}).\end{aligned}$$

لذا ، (۲۲) و (۲۳) ایجاب می‌کنند که به ازای $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$

$$\frac{|\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - BA\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} \le \|B\|\,\varepsilon(\mathbf{h}) + [\|A\| + \varepsilon(\mathbf{h})]\eta(\mathbf{k})$$

فرض کنیم $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. در ایــن صــورت ، $\varepsilon(\mathbf{h}) \to 0$. همچنین ، بنــابر (۲۳) ، $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$. درنتیجه ، $\eta(\mathbf{k}) \to 0$. از اینها $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0) = BA$ نتیجه می‌شود ، که همــان حکم (۲۱) خواهد بود .

۱۶۰۹ مشتقات جزئی . مجددا "به‌تابع $\mathbf{f}$ که‌مجموعه‌ٔ باز $E \subset R^n$ را بتوی R^m می‌نگارد توجه می‌کنیم . فــرض مــی‌کنیم $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ و $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ پایه‌های متعارف R^n و R^m باشند .

مؤلفه‌های $\mathbf{f}$ توابع حقیقی $f_1, \ldots, f_m$ اند که با

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i \qquad (x \in E) \tag{24}$$

یا ، معادلا" ، با $f_i(x) = f(x) \cdot u_i$ ، $1 \le i \le m$ ، تعریف می‌شوند .

به ازای $x \in E$ ، $1 \le i \le m$ ، و $1 \le j \le n$ ، تعریف می‌کنیم

$$(D_j f_i)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t} \tag{25}$$

مشروط براینکه حد وجـود داشته باشد . با نوشتن $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ به جای $f_i(x)$ خواهیم دید که $D_j f_i$ مشتق f_i نسبت به x_j ، با ثابت ماندن سایر متغیرها ، می‌باشد . لذا ، نماد

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \tag{26}$$

اغلب به جای $D_j f_i$ به کار می‌رود و $D_j f_i$ مشتق جزئی نام دارد .

در بسیاری حالات که وجود مشتق در پرداختن به توابع یک متغیره کافی است ، در مورد تـوابع چنـد متغیره پیوستگی و یا لااقل کرانداری مشتقات جزئی ضرورت دارد . به عنوان‌مثال ، توابع f و g وصف‌شده‌در تمرین ۷ ، فصل ۴ ، در عین اینکه مشتقات جزئیشان در هر نقطه از R^2 وجود دارنـد پیوسته نیستند . حتی در مورد توابع پیوسته ، وجود تمام مشتقهای‌جزئی مشتقپذیری‌به‌معنی تعریف ۹۰۱۱ را ایجاب نخواهد کرد ؛ ر.ک. تمرینهای ۶ و ۱۴ و قضیهٔ ۹۰۲۱.

با اینحال ، اگربدانیم f در x مشتقپذیراست ، مشتقات جزئی آن در x وجود دارند و تبدیل خطی $f'(x)$ را کاملا" مشخص خواهند کرد :

۹۰۱۷ قضیه. فـرض‌کنیم f مجموعهٔ بـاز $E \subset R^n$ را بتوی R^m بنگارد و f در نقطهٔ $x \in E$ مشتقپذیر باشد . در این صورت ، مشتقات جزئی $(D_j f_i)(x)$ وجود دارند و

$$f'(x)e_j = \sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(x)u_i \qquad (1 \le j \le n). \tag{27}$$

در اینجا ، مثل بخش ۹۰۱۶ ، $\{e_1, \ldots, e_n\}$ و $\{u_1, \ldots, u_m\}$ پایه‌های متعارف R^n و R^m هستند .

برهان. j را ثابت می‌گیریم . چون f در x مشتقپذیر است ،

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j)-\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{f}'(\mathbf{x})(t\mathbf{e}_j)+\mathbf{r}(t\mathbf{e}_j)$$

که در آن وقتی $t \to 0$ ، $|\mathbf{r}(t\mathbf{e}_j)|/t \to 0$. لذا، خطـی بودن $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ نشان می‌دهد که

$$\lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j)-\mathbf{f}(\mathbf{x})}{t}=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j. \tag{28}$$

حال اگر $\mathbf{f}$ را، مثل (۲۴)، برحسب مختصاتش نشان دهیم، (۲۸) به صورت

$$\lim_{t\to 0}\sum_{i=1}^{m}\frac{f_i(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j)-f_i(\mathbf{x})}{t}\mathbf{u}_i=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j \tag{29}$$

در می‌آید. از ایـــن نتیجه می‌شود که، وقتی $t \to 0$ ، هر کسر در این مجموع حد دارد (ر.ک. قضیهٔ ۱۰۰۴). پس هر $(D_jf_i)(\mathbf{x})$ موجود است، و لذا، (۲۷) از (۲۹) حاصل خواهد شد.

در اینجا چند نتیجه از قضیهٔ ۱۷۰۹ را ذکر می‌کنیم:

فرض کنیم $[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]$ ماتریسی باشد که $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ را نسبت به پایه‌های متعارف‌ما، مثل بخش ۹۰۹، نمایش می‌دهد. در ایـــن صــورت، $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j$ بردار ستـــونی j ام $[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]$ است، و لذا، (۲۷) نشان می‌دهد که عدد $(D_jf_i)(\mathbf{x})$ محل تلاقی سطر i ام و ستون j ام $[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]$ را اشغال می‌کند. بنابراین،

$$[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]=\begin{bmatrix}(D_1f_1)(\mathbf{x}) & \cdots & (D_nf_1)(\mathbf{x})\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (D_1f_m)(\mathbf{x}) & \cdots & (D_nf_m)(\mathbf{x})\end{bmatrix}.$$

هرگاه $\mathbf{h}=\Sigma h_j\mathbf{e}_j$ بردار دلخواهی در R^n باشد، (۲۷) ایجاب خواهد کرد که

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}=\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(D_jf_i)(\mathbf{x})h_j\right\}\mathbf{u}_i. \tag{30}$$

۱۸۰۹ مثال. فرض کنیم γ یک نگاشت مشتقپذیر از قطعهٔ $(a,b)\subset R^1$ بتوی مجموعهٔ باز $E\subset R^n$ باشد. به‌عبارت دیگر، γ یک منحنی مشتقپذیر در E باشد. f را یک تابع حقیقی مشتقپذیر با قلمرو E می‌انگاریم. پس f یک نگاشت مشتقپذیر از E بتوی R^1 است. تعریف می‌کنیم

$$g(t)=f(\gamma(t))\quad(a<t<b). \tag{31}$$

در این صورت، قاعدهٔ زنجیره‌ای حکم می‌کند که

$$g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \qquad (a < t < b). \tag{32}$$

چون $\gamma'(t) \in L(R^1, R^n)$ و $f'(\gamma(t)) \in L(R^n, R^1)$ ،رابطهٔ (۳۲)، $g'(t)$ را همچون یک عملگر خطی بر R^1 تعریف می‌کند. این با این مطلب که g، (a, b) را بتوی R^1 می‌نگارد مطابقت دارد. بااینحال، $g'(t)$ را می‌توان به عنوان یک عدد حقیقی نیزملحوظ داشت. (این مطلب دربخش ۱۰۰۹ مطرح شده بود.) همانطورکه اینک خواهیم دید ،این عددرا می‌شود بر حسب مشتقات جزئی f و مشتقات مؤلفه‌های γ محاسبه کرد.

$[\gamma'(t)]$ نسبت بــه پایهٔ متعارف $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ازR^n یک ماتریس n در 1 (یک"ماتریس ستونی") است که در سطر i م خود $\gamma_i'(t)$ را دارد، که $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ مؤلفه‌های γ می‌باشند. به ازای هر $x \in E$ ، $[f'(x)]$ ماتریس1در n (یک "ماتریس سطری") است که $(D_jf)(x)$ را در ستون jمش دارد. پس $[g'(t)]$ ماتریس1 در 1 یاست که‌تنها درایه اش عدد حقیقی

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\gamma(t))\gamma_i'(t) \tag{33}$$

می‌باشد.

این حالت خاصی است از قاعدهٔ زنجیره‌ای که شخص مکرر با آن مواجه است .آن را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

به هر $x \in E$ یک بردار، که "گرادیان" f درx نام دارد، مربوط می‌شود که توسط

$$(\nabla f)(x) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(x)e_i \tag{34}$$

تعریف می‌گردد.

چون

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t)e_i, \tag{35}$$

رابطهٔ (۳۳) را می‌توان به شکل

$$g'(t) = (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t), \tag{36}$$

یعنی حاصل ضرب اسکالر بردارهای $(\nabla f)(\gamma(t))$ و $\gamma'(t)$ ، نوشت.

حال $x \in E$را ثابت نگـه می‌داریم، فرض می‌کنیم $u \in R^n$ یک‌برداریکه‌باشد (یعنی، $|u| = 1$)، و γ ی خاص

(37) $$\gamma(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{u} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

را اختیار می‌کنیم . دراین صورت ، به ازای هر t ، $\gamma'(t) = \mathbf{u}$. بنابراین ، (۳۶) نشا ن می‌دهد که

(38) $$g'(0) = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}.$$

از سوی دیگر ، (۳۷) نشان می‌دهد که

$$g(t) - g(0) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}).$$

لذا ، (۳۸) نتیجه خواهد داد که

(39) $$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}.$$

حدمذکوردر (۳۹) رامعمولا "*مشتق جهتی* f در $\mathbf{x}$ ، درجهت‌برداریکهٔ $\mathbf{u}$ ، می‌نامند ، و می‌توان آن را با $(D_{\mathbf{u}}f)(\mathbf{x})$ نشان داد .

چنانچه f و $\mathbf{x}$ ثابت ولـی $\mathbf{u}$ متغیر بـاشد ، (۳۹) نشان می‌دهد که $(D_{\mathbf{u}}f)(\mathbf{x})$ ، وقتی $\mathbf{u}$ مضرب‌اسکالرمثبتی از $(\nabla f)(\mathbf{x})$ است ، به‌ماکزیمم خودمی‌رسد . [اینجابایدحالت $(\nabla f)(\mathbf{x}) = 0$ را مستثنی کرد .]

هرگاه $\mathbf{u} = \Sigma u_i \mathbf{e}_i$ ، (۳۹) نشان‌می‌دهدکه $(D_{\mathbf{u}}f)(\mathbf{x})$ رامی‌توان‌برحسب مشتقات جزئی f در $\mathbf{x}$ با فرمول

(40) $$(D_{\mathbf{u}}f)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\mathbf{x}) u_i$$

بیان نمود .

برخی از این مفهومها در قضیهٔ زیر نقش خواهند داشت .

۹.۱۹ قضیه. *فرض‌کنیم* $\mathbf{f}$ *مجموعهٔ باز و محدب* $E \subset R^n$ *را بتوی* R^m *می‌نگارد ،* $\mathbf{f}$ *در* E *مشتقپذیر است ، و عددی حقیقی مانند* M *هست بقسمی که به ازای هر* $\mathbf{x} \in E$ ،

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\| \le M.$$

در این صورت ، به ازای هر $\mathbf{a} \in E$ *و* $\mathbf{b} \in E$ ،

$$|\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})| \le M|\mathbf{b} - \mathbf{a}|.$$

برهان. $\mathbf{a} \in E$ و $\mathbf{b} \in E$ را ثابت می‌گیریم . به ازای هر $t \in R^1$ تعریف می‌کنیم

$$\gamma(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

بطوری‌که $\gamma(t) \in E$. چون E محدب‌است، اگر $0 \le t \le 1$، $\gamma(t) \in E$. قرار می‌دهیم

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(\gamma(t)) .$$

در این صورت ،

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{f}'(\gamma(t))\gamma'(t) = \mathbf{f}'(\gamma(t))(\mathbf{b}-\mathbf{a}) .$$

درنتیجه، به ازای هر $t \in [0, 1]$ ،

$$|\mathbf{g}'(t)| \le \|\mathbf{f}'(\gamma(t))\| \, |\mathbf{b}-\mathbf{a}| \le M|\mathbf{b}-\mathbf{a}| .$$

بنابر قضیهٔ ۱۹۰۵ ،

$$|\mathbf{g}(1) - \mathbf{g}(0)| \le M|\mathbf{b}-\mathbf{a}| .$$

اما $\mathbf{g}(0) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ و $\mathbf{g}(1) = \mathbf{f}(\mathbf{b})$. این برهان را تمام خواهد کرد .

نتیجه. هرگاه، علاوه براین، به ازای هر $\mathbf{x} \in E$ ، $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 0$ ، آنگاه $\mathbf{f}$ ثابت می‌باشد .

برهان. برای اثبات‌این‌مطلب‌توجه‌کنیدکه مفروضات‌قضیه‌اینک‌به ازای $M = 0$ برقرار است .

۲۰۰۹ تعریف. نگاشت‌مشتقپذیر $\mathbf{f}$ ازمجموعهٔ‌باز $E \subset R^n$ بتوی R^m رابه‌طورپیوسته مشتقپذیر در E گویند هرگاه $\mathbf{f}'$ یک نگاشت پیوسته از E بتوی $L(R^n, R^m)$ باشد .

صریحتر بگوییم ، شرط‌آن است که به‌هر $\mathbf{x} \in E$ وهر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ ای‌چنان‌نظیر شود که اگر $\mathbf{y} \in E$ و $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| < \delta$ ،

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\| < \varepsilon .$$

اگر چنین باشد ، نیز می‌گوییم $\mathbf{f}$ یک $\mathscr{C}'$نگاشت است یا که $\mathbf{f} \in \mathscr{C}'(E)$.

۲۱۰۹ قضیه. فرض‌کنیم $\mathbf{f}$ مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ را بتوی R^m بنگارد . دراین‌صورت ، $\mathbf{f} \in \mathscr{C}'(E)$ اگر و فقط‌اگر مشتقات جزئی $D_j f_i$ ، به‌ازای $1 \le i \le m$، $1 \le j \le n$ ، بر E وجود داشته و پیوسته باشند .

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $\mathbf{f} \in \mathscr{C}'(E)$. بنابر (۲۷) ، به ازای هر i ، هر j ، وهر $\mathbf{x} \in E$ ،

$$(D_jf_i)(\mathbf{x}) = (\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{u}_i .$$

پس

$$(D_jf_i)(\mathbf{y}) - (D_jf_i)(\mathbf{x}) = \{[\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})]\mathbf{e}_j\} \cdot \mathbf{u}_i .$$

و چون $|\mathbf{u}_i| = |\mathbf{e}_j| = 1$ ، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}|(D_jf_i)(\mathbf{y}) - (D_jf_i)(\mathbf{x})| &\le |[\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})]\mathbf{e}_j| \\ &\le \|\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\|.\end{aligned}$$

بنابراین، D_jf_i پیوسته می‌باشد.

برای عکس قضیه کافی است حالت $m=1$ را در نظر بگیریم. (چرا؟) $\mathbf{x} \in E$ و $\varepsilon > 0$ راثابت‌اختیارمی‌کنیم. چون E باز است، گوی بازی مانند $S \subset E$ به مرکز $\mathbf{x}$ و شعاع r وجود دارد، و پیوستگی توابع D_jf نشان می‌دهد که r را می‌توان طوری گرفت که

$$|(D_jf)(\mathbf{y}) - (D_jf)(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{n} \qquad (\mathbf{y} \in S,\ 1 \le j \le n). \tag{41}$$

فرض کنیم $\mathbf{h} = \Sigma h_j \mathbf{e}_j$ و $|\mathbf{h}| < r$. قرار می‌دهیم $\mathbf{v}_0 = 0$ و، به‌ازای $1 \le k \le m$ ، $\mathbf{v}_k = h_1\mathbf{e}_1 + \cdots + h_k\mathbf{e}_k$. در این صورت،

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} [f(\mathbf{x}+\mathbf{v}_j) - f(\mathbf{x}+\mathbf{v}_{j-1})]. \tag{42}$$

چون به ازای $1 \le k \le n$ ، $|\mathbf{v}_k| < r$ و، چون S محدب است، قطعات با نقاط انتهایی $\mathbf{x}+\mathbf{v}_{j-1}$ و $\mathbf{x}+\mathbf{v}_j$ در S جای دارند. از آنجا که $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{j-1} + h_j\mathbf{e}_j$ ، قضیهٔ مقدارمیانگین (۵-۱۰) نشان می‌دهد که j مین جمعده در (۴۲) به ازای $\theta_j \in (0,1)$ ای مساوی

$$h_j(D_jf)(\mathbf{x} + \mathbf{v}_{j-1} + \theta_j h_j \mathbf{e}_j)$$

است، و با استفاده از (۴۱) معلوم می‌شود که تفاوت این با $h_j(D_jf)(\mathbf{x})$ از $|h_j|\varepsilon/n$ کمتر است. بنابر (۴۲) نتیجه می‌شود که به ازای هر $\mathbf{h}$ ی که $|\mathbf{h}| < r$ ،

$$\left| f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{n} h_j(D_jf)(\mathbf{x}) \right| \le \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |h_j|\varepsilon \le |\mathbf{h}|\varepsilon.$$

این مبین آن‌است که f در $\mathbf{x}$ مشتق‌پذیرمی‌باشد و $f'(\mathbf{x})$ تابعی است خطی که عدد $\Sigma h_j(D_jf)(\mathbf{x})$ را به بردار $\mathbf{h} = \Sigma h_j \mathbf{e}_j$ نسبت می‌دهد. ماتریس $[f'(\mathbf{x})]$ از سطر $(D_1f)(\mathbf{x}), \ldots, (D_nf)(\mathbf{x})$ تشکیل شده است. و چون $D_1f, \ldots, D_nf$ توابع پیوسته‌ای بر E اند، نکات پایانی بخش ۹-۹ نشان خواهند داد که $f \in \mathscr{C}'(E)$.

اصل انقباض

حال بحث مشتقگیری را قطع می‌کنیم تا یک قضیهٔ نقطهٔ ثابت را که در فضاهای متری تام معتبر است وارد کار نماییم . از این قضیه در برهان قضیهٔ تابع معکوس استفاده خواهد شد .

۲۲۰۹ تعریف . فرض کنیم X یک‌فضای متری با متر d باشد . هرگاه φ ، X را بتوی X بنگارد و عددی مثل $c < 1$ باشد بطوری که به ازای هر $x, y \in X$ ،

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c\, d(x, y), \tag{43}$$

آنگاه φ یک ***انقباض*** از X بتوی X نام دارد .

۲۳۰۹ قضیه. هرگاه X یک فضای متری تام و φ یک انقباض از X بتوی X باشد ، آنگاه یک و فقط یک $x \in X$ هست که $\varphi(x) = x$.

به عبارت دیگر ، φ دارای نقطهٔ ثابت منحصر بفردی می‌باشد . یکتایی این نقطه بدیهی است ، زیرا هرگاه $\varphi(x) = x$ و $\varphi(y) = y$ ، آنگاه (۴۳) نتیجه می‌دهد که $d(x, y) \leq c\, d(x, y)$ ، که فقط وقتی می‌تواند روی دهد که $d(x, y) = 0$.

وجود یک نقطهٔ ثابت φ بخش اصلی قضیه است . برهان عملا " یک روش ساختن برای تعیین جای نقطهٔ ثابت به دست می‌دهد .

برهان . $x_0 \in X$ را دلخواه اختیار و $\{x_n\}$ را به طور بازگشتی ، با فرض

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{44}$$

تعریف می‌کنیم .

$c < 1$ را قسمی می‌گیریم که (۴۳) برقرار باشد . در این صورت ، به ازای $n \geq 1$ داریم

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})) \leq c\, d(x_n, x_{n-1}).$$

پس استقرا نتیجه می‌دهد که

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n d(x_1, x_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{45}$$

چنانچه $n < m$ ، نتیجه می‌شود که

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n+1}^{m} d(x_i, x_{i-1})$$

$$\leq (c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{m-1})\, d(x_1, x_0)$$
$$\leq [(1-c)^{-1}\, d(x_1, x_0)]c^n.$$

لذا، $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی می‌باشد. چون X تام است، بـه ازای x ی در X، $\lim x_n = x$.

و چون φ یک انقباض است، φ بر X پیوسته (درواقع، به طور یکنواخت پیوسته) است. پس

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

قضیهٔ تابع معکوس

قضیهٔ تـابع معکوس، به طور نادقیق، می‌گوید که نگاشت به طور پیوسته مشتقپذیر $\mathbf{f}$ در همسایگی هر نقطهٔ $\mathbf{x}$ که در آن تبدیل خطی $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ معکوسپذیر باشد معکوسپذیر است:

۹.۲۴ قضیه. فرض‌کنیم $\mathbf{f}$ یک $\mathscr{C}'$-نگاشت *از مجموعهٔ باز* $E \subset R^n$ *بتوی* R^n *باشد، به ازای* $\mathbf{a} \in E$ *ای* $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ *معکوسپذیر باشد، و* $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. *در این صورت،*

(آ) *مجموعه‌های بازی چون* U *و* V *در* R *وجود دارند بطوری که* $\mathbf{a} \in U$، $\mathbf{b} \in V$، $\mathbf{f}$ *بر* U *یک به یک است، و* $\mathbf{f}(U) = V$؛

(ب) *هرگاه* $\mathbf{g}$ *معکوس* $\mathbf{f}$ *[که بنابر (آ) وجود دارد] باشد که در* V *با*

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in U)$$

تعریف می‌شود، آنگاه $\mathbf{g} \in \mathscr{C}'(V)$.

اگر معادلهٔ $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ را بـه صورت مؤلفه‌ای بنوسیم، به تعبیر زیر از قضیه دست خواهیم یافت: دستگاه n معادلهٔ

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

را، اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ به همسایگیهای به قدر کافی کوچک $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ محدود شوند، می‌توان نسبت به $x_1, \ldots, x_n$ و بر حسب $y_1, \ldots, y_n$ حل کرد؛ جوابها منحصر بفرد و به طور پیوسته مشتقپذیر می‌باشند.

برهان

(آ) قرار می‌دهیم $A = \mathbf{f}'(\mathbf{a})$ ، و λ را قسمی اختیار می‌کنیم که

$$2\lambda\|A^{-1}\| = 1. \tag{46}$$

چون $\mathbf{f}'$ در $\mathbf{a}$ پیوسته است ، گوی بازی چون $U \subset E$ به مرکز $\mathbf{a}$ وجود دارد بطوری که

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}) - A\| < \lambda \qquad (\mathbf{x} \in U). \tag{47}$$

به هر $\mathbf{y} \in R^n$ تابع φ را که با

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x})) \qquad (\mathbf{x} \in E) \tag{48}$$

تعریف شده مربوط می‌سازیم .

توجه کنید که $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ اگر و فقط اگر $\mathbf{x}$ یک نقطهٔ ثابت φ باشد .

چون $\varphi'(\mathbf{x}) = I - A^{-1}\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = A^{-1}(A - \mathbf{f}'(\mathbf{x}))$ ، (۴۶) و (۴۷)

ایجاب می‌کنند که

$$\|\varphi'(x)\| < \tfrac{1}{2} \qquad (\mathbf{x} \in U). \tag{49}$$

پس، بنابر قضیهٔ ۱۹.۹ ،

$$|\varphi(\mathbf{x}_1) - \varphi(\mathbf{x}_2)| \le \tfrac{1}{2}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \qquad (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U). \tag{50}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که φ حداکثر یک نقطهٔ ثابت در U دارد . درنتیجه، به ازای حداکثر یک $\mathbf{x} \in U$ ، $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

لذا ، $\mathbf{f}$ در U یک به یک می‌باشد .

حال قرار می‌دهیم $V = \mathbf{f}(U)$ و $\mathbf{y}_0 \in V$ را اختیار می‌کنیم . در این صورت ، به ازای $\mathbf{x}_0 \in U$ ای $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. فرض‌کنیم B گوی‌بازی‌به‌مرکز $\mathbf{x}_0$ و شعاع $r > 0$ باشد آنقدرکوچک که بستش $\bar{B}$ در U قرار گیرد . نشان می‌دهیم که هرگاه $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| < \lambda r$ ، آنگاه $\mathbf{y} \in V$. این البته ثابت خواهد کرد که V باز است .

$\mathbf{y}$ ی را که $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| < \lambda r$ ثابت می‌گیریم . برای φ به صورت (۴۸) داریم

$$|\varphi(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0| = |A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)| < \|A^{-1}\|\lambda r = \frac{r}{2}.$$

بنابراین، اگر $\mathbf{x} \in \bar{B}$ ، از (۵۰) نتیجه می‌شود که

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0| \le |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)| + |\varphi(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0|$$
$$< \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| + \frac{r}{2} \le r;$$

پس $\varphi(\mathbf{x}) \in B$. توجه کنید که (۵۰) برقرار است اگر که $\mathbf{x}_1 \in \bar{B}$ و $\mathbf{x}_2 \in \bar{B}$.

لذا ، φ یک انقباض از $\bar{B}$ بتوی $\bar{B}$ خواهد بود . $\bar{B}$ ، به دلیل اینکه زیرمجموعهٔ بسته‌ای از R^n است ، تام می‌باشد . ازاینرو، قضیهٔ ۲۳.۹ ایجاب می‌کند که φ نقطهٔ‌ثابتی

چون $\bar{B}$ $x \in$ داشته باشد. برای این x، $f(x) = y$. بنابر این $y \in f(\bar{B}) \subset f(U) = V$.

این قسمت (آ) قضیه را ثابت خواهد کرد.

(ب) $y \in V$, $y + k \in V$ رااختیارمی‌کنیم. دراین صورت، $x \in U$ ی و $x + h \in U$ ی هستند بطوری که $y = f(x), y + k = f(x + h)$. برای φ به صورت (۴۸) داریم

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = h + A^{-1}[f(x) - f(x + h)] = h - A^{-1}k.$$

بنابر (۵۰)، $|h - A^{-1}k| \le \frac{1}{2}|h|$. پس $|A^{-1}k| \ge \frac{1}{2}|h|$ و

$$|h| \le 2\|A^{-1}\|\ |k| = \lambda^{-1}|k|. \tag{51}$$

بر طبق (۴۶)، (۴۷)، و قضیهٔ ۸.۹، $f'(x)$ معکوسی مثل T دارد. چون

$$g(y + k) - g(y) - Tk = h - Tk = -T[f(x + h) - f(x) - f'(x)h],$$

نامساوی (۵۱) ایجاب می‌کند که

$$\frac{|g(y + k) - g(y) - Tk|}{|k|} \le \frac{\|T\|}{\lambda} \cdot \frac{|f(x + h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|}.$$

وقتی $k \to 0$، (۵۱) نشان خواهد داد که $h \to 0$. لذا، سمت راست نامساوی آخر به 0 میل می‌کند. پس همین مطلب در مورد سمت چپ نیز صادق است. درنتیجه، ثابت کرده‌ایم که $g'(y) = T$. اما T معکوس $f'(x) = f'(g(y))$ گرفته شده بود. پس

$$g'(y) = \{f'(g(y))\}^{-1} \qquad (y \in V). \tag{52}$$

بالاخره، توجه‌کنیدکه g (به‌دلیل مشتقپذیر بودن) یک نگاشت پیوسته از V بروی U است، f' یک نگاشت پیوسته از U بتوی مجموعهٔ Ω متشکل از تمام عناصر معکوسپذیر $L(R^n)$ است، و، بنابرقضیهٔ ۸.۹، تابع انعکاس یک نگاشت پیوسته از Ω بروی Ω می‌باشد. اگر اینها را با (۵۲) تلفیق کنیم، خواهیم دید که $g \in \mathscr{C}'(V)$.

این برهان را تمام خواهد کرد.

تبصره. از قدرت کامل فرض $f \in \mathscr{C}'(E)$ تنها در آخرین بند برهان پیش استفاده شده است. مطالب دیگر تا معادلهٔ (۵۲) از وجود $f'(x)$ به ازای $x \in E$، معکوسپذیری

$f'(a)$ ، و پیوستگی f' فقط در نقطهٔ a نتیجه شده‌اند[1] .

قضیهٔ زیر نتیجهٔ مستقیم قسمت (آ) قضیهٔ تابع معکوس است .

۲۵۰۹ قضیه. *هرگاه f یک $\mathscr{C}'$-نگاشت از مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ بتوی R^n و $f'(x)$ به ازای هر $x \in E$ معکوسپذیر باشد ، آنگاه $f(W)$ به ازای هر مجموعهٔ باز $W \subset E$ یک زیرمجموعهٔ باز R^n خواهد بود .*

به عبارت دیگر ، f یک نگاشت باز از E بتوی R^n می‌باشد .

مفروضات قضیهٔ فوق این‌را که هر نقطهٔ $x \in E$ همسایگیی دارد که در آن f یک‌به‌یک است تضمین می‌کند . این‌را می‌توان به‌این طریق گفت که f در E به طور موضعی یک به یک است . اما f الزاما" تحت این شرایط در E یک به یک نیست . برای دیدن مثال ، .ر.ک. تمرین ۱۷ .

قضیهٔ تابع ضمنی

اگــر f یک تابع حقیقی به طور پیوسته مشتقپذیر در صفحه باشد ، معادلهٔ $f(x, y) = 0$ را می‌شود در همسایگی هر نقطه مانند (a, b) که در آن $f(a, b) = 0$ و $\partial f/\partial y \neq 0$ نسبت به y و برحسب x حل کرد . همچنین ، می‌توان این معادله را در مجاورت (a, b) ، اگر که $\partial f/\partial x$ در آن مخالف صفر باشد ، نسبت به x و برحسب y حل نمود . برای مثالی ساده که لزوم فرض $\partial f/\partial y \neq 0$ رانشان دهد ، $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ را مورد توجه قرار دهید .

بیان بسیار غیر صوری‌پیش‌ساده‌ترین‌حالت (حالت $m = n = 1$ قضیهٔ ۲۸۰۹) "قضیهٔ تابع ضمنی" است . در برهانش قویا" از این مطلب که تبدیلات به طور پیوسته مشتقپذیر موضعا" خیلی شبیه به مشتقات خود عمل می‌کنند استفاده شده است . بدینجهت ، ما ابتدا قضیهٔ ۲۷۰۹ ، یعنی شکل خطی قضیهٔ ۲۸۰۹ ، را ثابت می‌کنیم .

۲۶۰۹ نمادگذاری . هرگاه $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in R^m$ ، به‌جای نقطه (یا بردار)

---

۰۱ دراین مورد خواننده را به مقاله‌ای که توسط
A .Nijenhuis in *Amer. Math. Monthly*, vol. 81, 1974, pp. 969–980
نوشته شده ارجاع می‌دهیم .

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in R^{n+m}$$

خواهیم نوشت $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. درآنچه خواهد آمد ، اولین درایه در $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ویا در علامتی مشابه همواره برداری در R^n است ؛ دومین درایه برداری در R^m خواهد بود .

هر $A \in L(R^{n+m}, R^n)$ رامی‌توان به‌دو تبدیل خطی A_x و A_y ، که به ازای هر $\mathbf{h} \in R^n$ و $\mathbf{k} \in R^m$ با

$$A_x \mathbf{h} = A(\mathbf{h}, \mathbf{0}), \qquad A_y \mathbf{k} = A(\mathbf{0}, \mathbf{k}) \tag{53}$$

تعریف می‌شوند ، تجزیه کرد . در این صورت ، $A_x \in L(R^n)$ ، $A_y \in L(R^m, R^n)$ و

$$A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = A_x \mathbf{h} + A_y \mathbf{k} . \tag{54}$$

حال شکل خطی قضیهٔ تابع ضمنی تقریبا" واضح است .

۲۷۰۹ قضیه. هرگاه $A \in L(R^{n+m}, R^n)$ و A_x معکوسپذیرباشد ، آنگاه نظیر هر $\mathbf{k} \in R^m$ یک $\mathbf{h} \in R^n$ منحصر بفرد وجود دارد که $A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = 0$.

این $\mathbf{h}$ را می‌توان از $\mathbf{k}$ با فرمول

$$\mathbf{h} = -(A_x)^{-1} A_y \mathbf{k} \tag{55}$$

به دست آورد .

برهان. بنابر (۵۴) ، $A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = 0$ اگر و فقط اگر

$$A_x \mathbf{h} + A_y \mathbf{k} = 0,$$

که وقتی A_x معکوسپذیر باشد ، همان (۵۵) می‌باشد .

ماحصل قضیهٔ ۲۷۰۹ ، بــا الفاظی دیگر ، این است که اگر $\mathbf{k}$ معلوم باشد ، معادلهٔ $A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = 0$ را می‌توان (به طور منحصر بفرد) نسبت به $\mathbf{h}$ حل کرد ، و جواب $\mathbf{h}$ تابعی خطی‌از $\mathbf{k}$ خواهد بود . افراد آشنا با جبر خطی توجه دارند که این یک حکم بسیار آشنا در مورد دستگاههای معادلات خطی می‌باشد .

۲۸۰۹ قضیه. فرض کنیم $\mathbf{f}$ یک $\mathscr{C}'$ ـنگاشت از مجموعهٔ باز $E \subset R^{n+m}$ بتوی R^n باشد بطوری‌که به ازای نقطه‌ای مانند $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E$ ، $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

قرار می‌دهیم $A = \mathbf{f}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ و فرض می‌کنیم A_x معکوسپذیر باشد .

دراین‌صورت، مجموعه‌های بازی چون $U \subset R^{n+m}$ و $W \subset R^m$ با شرایط $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U$ و $\mathbf{b} \in W$ هستند که از خواص زیر برخوردارند:

به هر $\mathbf{y} \in W$ یک $\mathbf{x}$ منحصر بفرد چنان نظیر است که

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \quad \text{و} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \cdot \tag{56}$$

اگر این $\mathbf{x}$ مساوی $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ تعریف‌شود، $\mathbf{g}$ یک $\mathscr{C}'$ نگاشت از W بتوی R^n خواهد بود،

$\mathbf{g}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$،

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0 \qquad (\mathbf{y} \in W), \tag{57}$$

و

$$\mathbf{g}'(\mathbf{b}) = -(A_x)^{-1} A_y. \tag{58}$$

تابع g "تلویحا" با (۵۷) تعریف‌خواهد شد. از اینجاست که نام قضیه پدید آمده است.

معادلهٔ $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ را می‌توان بـه صورت دستگاهی از n معادلهٔ $n+m$ متغیری نوشت:

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \cdot \end{aligned} \tag{59}$$

این فرض که A_x معکوسپذیر است یعنی ماتریس n در n

$$\begin{bmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1 f_n & \cdots & D_n f_n \end{bmatrix}$$

حساب شده‌در $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ یک عملگر خطی معکوسپذیر در R^n را تعریف می‌کند؛ به عبارت دیگر، بردارهای ستونی آن باید مستقل باشند یا، به‌بیان‌معادل، باید دترمینانش مخالف 0 باشد. (ر.ک. قضیهٔ ۹.۳۶). هرگاه، علاوه‌بر این، (۵۹) وقتی $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ و $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ برقرار باشد، ماحصل قضیه‌این خواهد بود که (۵۹) را می‌توان به ازای هر $\mathbf{y}$ نزدیک به $\mathbf{b}$ نسبت به $x_1, \ldots, x_n$ و برحسب $y_1, \ldots, y_m$ حل کرد، و این جوابها توابعی به‌طور پیوسته مشتقپذیر از $\mathbf{y}$ می‌باشند.

برهان. $\mathbf{F}$ را با

$$F(x, y) = (f(x, y), y) \qquad ((x, y) \in E) \tag{60}$$

تعریف می‌کنیم . در این صورت ، F یک $\mathscr{C}'$-نگاشت از E بتوی R^{n+m} است. حکم می‌کنیم که $F'(a, b)$ یک عنصر معکوسپذیر $L(R^{n+m})$ است :

گوییم چون $f(a, b) = 0$ ، داریم

$$f(a + h, b + k) = A(h, k) + r(h, k)$$

که در آن r باقیمانده‌ای است که در تعریف $f'(a, b)$ ظاهر می‌شود. و چون

$$F(a + h, b + k) - F(a, b) = (f(a + h, b + k), k)$$
$$= (A(h, k), k) + (r(h, k), 0) \text{ ،}$$

نتیجه می‌شود که $F'(a, b)$ یک عملگر خطی بر R^{n+m} است که (h, k) را به $(A(h, k), k)$ می‌نگارد . هرگاه این بردار نقش 0 باشد ، آنــگاه $A(h, k) = 0$ و $k = 0$. در نتیجــه ، $A(h, 0) = 0$ ، و قضیهٔ ۲۷۰۹ ایجاب خواهد کرد که $h = 0$. از اینجا نتیجه می‌شود که $F'(a, b)$ یک به یک است ؛ پس معکوسپذیر خواهد بود (قضیهٔ ۵۰۹) .

لذا ، می‌توان قضیهٔ تابع معکوس را در مورد F اعمال کرد . این کار نشان می‌دهد که مجموعه‌های بازی چون U و V در R^{n+m} با شرایط $(a, b) \in U$ ، $(0, b) \in V$ وجود دارند بطوری که F یک نگاشت 1-1 از U بروی V است .

ما W را مجموعهٔ تمــام y هایــی در R^m می‌گیریم که $(0, y) \in V$. توجه کنید که $b \in W$.

واضح است که W ، بخاطر بازبودن V ، باز می‌باشد .

هرگاه $y \in W$ ، آنگاه به ازای (x, y) ی در U ، $(0, y) = F(x, y)$. بنابر (۶۰)، به ازای این x ، $f(x, y) = 0$.

فرض کنیم ، با همین y ، $(x', y) \in U$ و $f(x', y) = 0$. در این صورت ،

$$F(x', y) = (f(x', y), y) = (f(x, y), y) = F(x, y).$$

چون F در U یک به یک است ، نتیجه می‌شود که $x' = x$.

این قسمت اول قضیه را ثابت می‌کند .

برای اثبات قسمــت دوم ، $g(y)$ را به ازای $y \in W$ این طور تعریف می‌کنیم که $(g(y), y) \in U$ و (۵۷) برقرار است . در این صورت ،

$$F(g(y), y) = (0, y) \qquad (y \in W). \tag{61}$$

هرگاه G آن نگاشت از V بروی U باشد که F را عکس کند ، آنگاه ، بنابر قضیهٔ تابع معکوس ،

$\mathbf{G} \in \mathscr{C}'$ ، و (۶۱) نتیجه خواهد داد که

$$(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{G}(\mathbf{0}, \mathbf{y}) \qquad (\mathbf{y} \in W). \tag{62}$$

چون $\mathbf{G} \in \mathscr{C}'$ ، (۶۲) نشان می‌دهد که $\mathbf{g} \in \mathscr{C}'$.

بالاخره، برای محاسبهٔ $\mathbf{g}'(\mathbf{b})$ ، قرار می‌دهیم $(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y})$.
در این صورت،

$$\Phi'(\mathbf{y})\mathbf{k} = (\mathbf{g}'(\mathbf{y})\mathbf{k}, \mathbf{k}) \qquad (\mathbf{y} \in W, \mathbf{k} \in R^m). \tag{63}$$

بنابر (۵۷)، $\mathbf{f}(\Phi(\mathbf{y}))$ در W صفر است. پس قاعدهٔ زنجیره‌ای نشان می‌دهد که

$$\mathbf{f}'(\Phi(\mathbf{y}))\Phi'(\mathbf{y}) = 0.$$

وقتی $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ، $\Phi(\mathbf{y}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ، و $\mathbf{f}'(\Phi(\mathbf{y})) = A$. از اینرو،

$$A\Phi'(\mathbf{b}) = 0. \tag{64}$$

حال از (۶۴)، (۶۳)، و (۵۴) نتیجه می‌شود که به ازای هر $\mathbf{k} \in R^m$ ،

$$A_x\mathbf{g}'(\mathbf{b})\mathbf{k} + A_y\mathbf{k} = A(\mathbf{g}'(\mathbf{b})\mathbf{k}, \mathbf{k}) = A\Phi'(\mathbf{b})\mathbf{k} = 0.$$

لذا،

$$A_x\mathbf{g}'(\mathbf{b}) + A_y = 0. \tag{65}$$

این با (۵۸) معادل است، و برهان تمام خواهد بود.

توجه. رابطهٔ (۶۵) برحسب مؤلفه‌های $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ این طور می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{n} (D_j f_i)(\mathbf{a}, \mathbf{b})(D_k g_j)(\mathbf{b}) = -(D_{n+k} f_i)(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

یا

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial g_j}{\partial y_k}\right) = -\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right),$$

که در آنها $1 \le i \le n$ و $1 \le k \le m$.

این به ازای هر k یک دستگاه n معادلهٔ خطی است که در آن مشتقات $\partial g_j/\partial y_k$ $(1 \le j \le n)$ مجهولها هستند.

۲۹.۹ مثال. n را 2 و m را 3 گرفته، نگاشت $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ از R^5 بتوی R^2 را که با

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 2e^{x_1} + x_2 y_1 - 4y_2 + 3,$$

$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3$$

داده شده در نظر می‌گیریم. هرگاه $\mathbf{a} = (0, 1)$ و $\mathbf{b} = (3, 2, 7)$ ، آنگاه $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

ماتریس تبدیل $A = \mathbf{f}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ نسبت به پایه‌های متعارف عبارت است از

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

در نتیجه،

$$[A_x] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [A_y] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

ملاحظه‌می‌کنیم که بردارهای ستونی $[A_x]$ مستقل‌اند. پس A_x معکوسپذیراست، و قضیهٔ تابع ضمنی بودن یک $\mathscr{C}'$-نگاشت $\mathbf{g}$ را تأیید می‌کند که در یکی از همسایگیهای $(3, 2, 7)$ طوری تعریف شده که $\mathbf{g}(3, 2, 7) = (0, 1)$ و $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

می‌توانیم از (۵۸) برای محاسبهٔ $\mathbf{g}'(3, 2, 7)$ استفاده کنیم: گوییم چون

$$[(A_x)^{-1}] = [A_x]^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix},$$

(۵۸) نتیجه می‌دهد که

$$[\mathbf{g}'(3, 2, 7)] = -\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

نتیجه برحسب مشتقات جزئی چنین است:

$$\begin{array}{lll} D_1 g_1 = \frac{1}{4} & D_2 g_1 = \frac{1}{5} & D_3 g_1 = -\frac{3}{20} \\ D_1 g_2 = -\frac{1}{2} & D_2 g_2 = \frac{6}{5} & D_3 g_2 = \frac{1}{10} \end{array}$$

در نقطهٔ $(3, 2, 7)$.

قضیهٔ رتبه

با آنکه این قضیه به اندازهٔ قضیهٔ تـابع معکوس یا قضیهٔ تابع ضمنی مهم نیست، ما آن را از اینرو که گواه‌جالب‌دیگری‌از این اصل کلی است که "رفتار یک نگاشت به طور پیوسته مشتقپذیر $\mathbf{F}$ در مجاورت $\mathbf{x}$ با رفتار تبدیل خطی $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ شبیه است" ذکر می‌نماییم.

پیش از بیان آن، به چند مطلب دیگر در باب تبدیلات خطی نیاز داریم.

۳۰۰۹ چند تعریف. فرض کنیم، مثل تعریف ۶۰۹، X و Y فضاهایی برداری باشند و $A \in L(X, Y)$. **فضای پوچ** A، یعنی $\mathscr{N}(A)$، عبارت‌است‌از مجموعهٔ تمام $\mathbf{x}$ هایی در X که در آنها $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. واضح است که $\mathscr{N}(A)$ یک فضای برداری در X است.

همچنین، **برد** A، یعنی $\mathscr{R}(A)$، یک فضای برداری در Y می‌باشد.

رتبهٔ A برابر بعد $\mathscr{R}(A)$ تعریف می‌شود.

به عنوان مثال، عناصر معکوسپذیر $L(R^n)$ درست همانهایی هستند که رتبه‌شان n است. این مطلب از قضیهٔ ۵۰۹ نتیجه می‌شود.

هرگاه $A \in L(X, Y)$ و A رتبهٔ 0 داشته باشد، آنگاه‌به‌ازای‌هر $x \in A$، $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. درنتیجه، $\mathscr{N}(A) = X$. در این مورد، ر.ک. تمرین ۲۵.

۳۱۰۹ تصویرها. فرض‌کنیم X یک فضای برداری باشد. عملگر $P \in L(X)$ را یک **تصویر در** X خوانیم هرگاه $P^2 = P$.

به بیان‌صریحتر، شرط آن است که به ازای هر $\mathbf{x} \in X$، $P(P\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$. به عبارت دیگر، P هر بردار واقع در بردخود $\mathscr{R}(P)$ را ثابت نگه می‌دارد.

در اینجا چند خاصیت مقدماتی تصویرها ذکر می‌شوند:

(آ) هرگاه P یک تصویر در X باشد، هر $\mathbf{x} \in X$ نمایش منحصر بفردی به شکل

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$$

دارد که در آن $\mathbf{x}_1 \in \mathscr{R}(P), \mathbf{x}_2 \in \mathscr{N}(P)$.

برای رسیدن به این نمایش، قرار می‌دهیم $\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}$، $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$ دراین‌صورت، $P\mathbf{x}_2 = P\mathbf{x} - P\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x} - P^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ در مورد یکتایی، P را بر معادلهٔ $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ اعمال می‌کنیم. چون $\mathbf{x}_1 \in \mathscr{R}(P)$، $P\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1$. و چون $P\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$، نتیجه می‌شود که $\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}$.

(ب) هرگاه X فضایی برداری با بعد متناهی و X_1 یک فضای برداری در آن باشد، تصویری چون P در X هست که $\mathscr{R}(P) = X_1$.

این مطلب در صورتی که X_1 فقط شامل $\mathbf{0}$ باشد بدیهی است؛ به ازای هر $\mathbf{x} \in X$ قرار می‌دهیم $P\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

پس فرض‌کنیم $\dim X_1 = k > 0$. در این صورت، بنابر قضیهٔ ۳۰۹، X پایه‌ای چون $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ داردبطوری‌که $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ یک‌پایه‌از X_1 می‌باشد. به ازای اسکالرهای دلخواه $c_1, \ldots, c_n$ تعریف می‌کنیم

$$P(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n) = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k.$$

در این صورت ، در ازای هر $\mathbf{x} \in X_1$ ، $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ، و $X_1 = \mathscr{R}(P)$.

توجه دارید که $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ یک پایهٔ $\mathscr{N}(P)$ است . همچنین ، توجه کنید که اگر $0 < \dim X_1 < \dim X$ ، بی‌نهایت تصویر در X با برد X_1 وجود دارد .

•

۳۲۰۹ قضیه. فرض‌کنیم m, n, r *اعدادی صحیح و نامنفی باشند ،* $m \geq r$ ، $n \geq r$ ، $\mathbf{F}$ *یک* $\mathscr{C}'$*-نگاشت از مجموعهٔ باز* $E \subset R^n$ *بتوی* R^m ، *و* $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ *به ازای هر* $\mathbf{x} \in E$ *دارای رتبهٔ* r *باشد .*

$\mathbf{a} \in E$ *را ثابت می‌گیریم ، قرار می‌دهیم* $A = \mathbf{F}'(\mathbf{a})$ ، Y_1 *را برد* A *تصور می‌کنیم ، و* P *را تصویری در* R^m *می‌انگاریم که بردش* Y_1 *است . فرض می‌کنیم* Y_2 *فضای پوچ* P *باشد .*

در این صورت ، مجموعه‌های بازی چون U *و* V *در* R^n *هستند که* $\mathbf{a} \in U$ ، $U \subset E$ ، *و* $\mathscr{C}'$*-نگاشت 1-1 ی مانند* $\mathbf{H}$ *از* V *بروی* U *وجود دارد (که معکوسش نیز از ردهٔ* $\mathscr{C}'$ *است) بطوری که*

$$\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) = A\mathbf{x} + \varphi(A\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in V) \tag{66}$$

که در آن φ *یک* $\mathscr{C}'$*-نگاشت از مجموعهٔ باز* $A(V) \subset Y_1$ *بتوی* Y_2 *می‌باشد .*

پس از اثبات ، از اطلاعاتی که (۶۶) شامل است توصیف هندسی تری به دست خواهیم داد .

برهان. هرگاه $r = 0$ ، قضیهٔ ۱۹۰۹ نشان می‌دهد که $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ در همسایگی U از $\mathbf{a}$ ثابت است ، و (۶۶) با فرض $V = U, \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \varphi(0) = \mathbf{F}(\mathbf{a})$ بداهتا " برقرار می‌باشد .

از حالا به بعد فرض می‌کنیم $r > 0$. چون $\dim Y_1 = r$ ، Y_1 پایه‌ای چون $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$ دارد . $\mathbf{z}_i \in R^n$ را قسمی می‌گیریم که $A\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_i \ (1 \leq i \leq r)$ ، و نگاشت خطی S از Y_1 بتوی R^n را به ازای جمیع اسکالرهای $c_1, \ldots, c_r$ با

$$S(c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_r\mathbf{y}_r) = c_1\mathbf{z}_1 + \cdots + c_r\mathbf{z}_r \tag{67}$$

تعریف می‌کنیم .

در این صورت ، به ازای $1 \leq i \leq r$ ، $AS\mathbf{y}_i = A\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_i$. بنابراین ،

$$AS\mathbf{y} = \mathbf{y} \qquad (\mathbf{y} \in Y_1). \tag{68}$$

نگاشت $\mathbf{G}$ از E بتوی R^n را با قرار

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + SP[\mathbf{F}(\mathbf{x}) - A\mathbf{x}] \qquad (\mathbf{x} \in E) \tag{69}$$

تعریف می‌کنیم. چون $\mathbf{F}'(\mathbf{a}) = A$ ، مشتقگیری از (۶۹) نشان خواهد داد که $\mathbf{G}'(\mathbf{a})$ مساوی I ، یعنی مساوی عملگر همانی بر R^n است. بر طبق قضیهٔ تابع معکوس، مجموعه‌های بازی‌چون U و V در R^n ، که $\mathbf{a} \in U$ ، وجود دارندبطوری که $\mathbf{G}$ یک نگاشت 1-1 از U بروی V است که معکوسش $\mathbf{H}$ نیز از ردهٔ $\mathscr{C}'$ می‌باشد. علاوه بر این، با انقباض U و V در صورت لزوم، می‌توان‌طوری ترتیب‌دادکه V محدب بوده‌و $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$ به ازای هر $\mathbf{x} \in V$ معکوسپذیر باشد.

توجه کنید که $ASPA = A$ ، زیرا $PA = A$ و (۶۸) برقرار است. بنابراین، (۶۹) نتیجه خواهد داد که

$$A\mathbf{G}(\mathbf{x}) = P\mathbf{F}(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in E). \tag{70}$$

بخصوص، (۷۰) به ازای هر $\mathbf{x} \in U$ برقرار است. اگر $\mathbf{x}$ را با $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ عوض کنیم، خواهیم داشت

$$P\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) = A\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in V). \tag{71}$$

تعریف می‌کنیم

$$\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) - A\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in V). \tag{72}$$

چون $PA = A$، تساوی (۷۱) ایجاب می‌کند که به ازای هر $\mathbf{x} \in V$، $P\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. پس ψ یک $\mathscr{C}'$-نگاشت از V بتوی Y_2 می‌باشد.

و چون V باز است، بوضوح $A(V)$ یک زیر مجموعهٔ باز بردش $\mathscr{R}(A) = Y_1$ خواهد بود.

برای اتمام برهان، یعنی رفتن از (۷۲) به (۶۶)، باید نشان دهیم که یک $\mathscr{C}'$ـ نگاشت φ از $A(V)$ بتوی Y_2 هست که در

$$\varphi(A\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in V) \tag{73}$$

صدق می‌کند.

به عنوان گامی به سوی (۷۳)، ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $\mathbf{x}_1 \in V$ ، $\mathbf{x}_2 \in V$ ، و $A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2$ داریم

$$\psi(\mathbf{x}_1) = \psi(\mathbf{x}_2). \tag{74}$$

به ازای $\mathbf{x} \in V$ قرار می‌دهیم $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x}))$. چون $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$ به ازای هر $\mathbf{x} \in V$

رتبهٔ n دارد، و $F'(x)$ به ازای هر $x \in U$ از رتبهٔ r است، نتیجه خواهد شد که

$$\operatorname{rank} \Phi'(x) = \operatorname{rank} F'(H(x))H'(x) = r \qquad (x \in V). \tag{75}$$

x را در V ثابت می‌گیریم. فرض می‌کنیم M برد $\Phi'(x)$ باشد. در این صورت، $M \subset R^m$ و $\dim M = r$. بر طبق (۷۱)،

$$P\Phi'(x) = A. \tag{76}$$

پس P، M را بروی $\mathscr{R}(A) = Y_1$ می‌نگارد. چون M و Y_1 یک بعد دارند، نتیجه خواهد شد که P (محدود به M) یک به یک می‌باشد.

حال فرض کنیم $Ah = 0$. در این صورت، بنابر (۷۶)، $P\Phi'(x)h = 0$. اما $\Phi'(x)h \in M$ و P بر M یک به یک است. لذا، $\psi'(x)h = 0$. حال نظری به (۷۲) معلوم می‌سازد که مطلب زیر ثابت شده است:

هرگاه $x \in V$ **و** $Ah = 0$، **آنگاه** $\Phi'(x)h = 0$.

اینک می‌توان رابطهٔ (۷۴) را اثبات کرد. فرض کنیم $x_1 \in V$، $x_2 \in V$، و $Ax_1 = Ax_2$. قرار می‌دهیم $h = x_2 - x_1$ و تعریف می‌کنیم

$$g(t) = \psi(x_1 + th) \qquad (0 \leq t \leq 1). \tag{77}$$

محدب بودن V نشان می‌دهد که به ازای این t ها $x_1 + th \in V$. درنتیجه،

$$g'(t) = \psi'(x_1 + th)h = 0 \qquad (0 \leq t \leq 1), \tag{78}$$

بطوری که $g(1) = g(0)$. اما $g(1) = \psi(x_2)$ و $g(0) = \psi(x_1)$. این (۷۴) را ثابت خواهد کرد.

بنابر (۷۴)، $\psi(x)$، به ازای $x \in V$، فقط به Ax وابسته است. لذا، (۷۳)، φ را بدون ابهام در $A(V)$ تعریف خواهد کرد. فقط باقی می‌ماند ثابت کنیم $\varphi \in \mathscr{C}'$.

$y_0 \in A(V)$ و $x_0 \in V$ را ثابت می‌گیریم بقسمی که $Ax_0 = y_0$. چون V باز است، y_0 دارای همسایگی W در Y_1 است بطوری که بردار

$$x = x_0 + S(y - y_0) \tag{79}$$

به ازای هر $y \in W$ در V جای دارد. بنابر (۶۸)،

$$Ax = Ax_0 + y - y_0 = y.$$

بنابراین، (۷۳) و (۷۹) نتیجه می‌دهند که

$$\varphi(y) = \psi(x_0 - Sy_0 + Sy) \qquad (y \in W). \tag{80}$$

این فرمول نشان‌می‌دهد که $\varphi \in \mathscr{C}'$ در W، درنتیجه‌در $A(V)$، زیرا $\mathbf{y}_0$ در $A(V)$ دلخواه گرفته شده بود.

در اینجا برهان تمام خواهد بود.

اینک به آنچه که قضیه در باب هندسهٔ نگاشت $\mathbf{F}$ می‌گوید می‌پردازیم.

هرگاه $\mathbf{y} \in \mathbf{F}(U)$، آنگاه به ازای $\mathbf{x} \in V$ ی، $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x}))$، و (۶۶) نشان می‌دهد که $P\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. بنابر این،

$$\mathbf{y} = P\mathbf{y} + \varphi(P\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{y} \in \mathbf{F}(U)). \tag{81}$$

این نشان می‌دهد که $\mathbf{y}$ به وسیلهٔ تصویرش $P\mathbf{y}$ معین می‌شود، و P، تحدیدش به $\mathbf{F}(U)$، یک نگاشت 1-1 از $\mathbf{F}(U)$ بروی $A(V)$ می‌باشد. لذا، $\mathbf{F}(U)$ یک "سطح r بعدی" است که "روی" هرنقطهٔ $A(V)$ درست یک‌نقطه‌دارد. $\mathbf{F}(U)$ را می‌توان به منزلهٔ نمودار φ نیز ملحوظ داشت.

چنانچه، مثل‌برهان، $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x}))$، (۶۶) نشان می‌دهد که که مجموعه‌های تراز Φ (اینها مجموعه‌هایی هستند که Φ بر آنها مقدار معینی دارد) دقیقا " مجموعه‌های تراز A در V اند. اینها "تخت" هستند زیرا فصل مشترک انتقالهای فضای برداری $\mathscr{N}(A)$ با V می‌باشند. توجه کنید که $\mathscr{N}(A) = n - r$ (تمرین ۲۵).

مجموعه‌های تراز $\mathbf{F}$ در U نقش مجموعه‌های تراز تخت Φ در V تحت $\mathbf{H}$ می‌باشند. ازـ اینرو، اینها "سطوحی $(n-r)$ بعدی" در U خواهند بود.

دترمینانها

دترمینانها اعدادی وابسته به ماتریسهای مربعی، و لذا عملگرهایی که با این ماتریسها نموده مـی‌شوند، می‌باشند. این اعداد صفرند اگر و فقط اگر عملگر نظیرشان معکوسپذیر نباشد. لذا، ازآنها می‌توان برای تعیین صحت و سقم مفروضات چند قضیهٔ قبل استفاده کرد. این اعداد در فصل ۱۰ نقش از این مهمتر را ایفا خواهند کرد.

۳۳.۹ تعریف. هرگاه $(j_1, \ldots, j_n)$ یک n تایی مرتب از اعداد صحیح باشد، تعریف می‌کنیم

$$s(j_1, \ldots, j_n) = \prod_{p<q} \operatorname{sgn}(j_q - j_p), \tag{82}$$

که در آن اگــر $x > 0$ ، $\operatorname{sgn} x = 1$ ، اگــر $x < 0$ ، $\operatorname{sgn} x = -1$ ؛ و اگر $x = 0$ ، $\operatorname{sgn} x = 0$. در این صورت، $s(j_1, \dots, j_n)$ مساوی 1 ، -1 ، یا 0 است، وچنانچه دوتا از j ها با هم عوض شوند، تغییر علامت خواهد داد.

فرض کنیــم $[A]$ ماتریس عملگر خطی A بر R^n نسبت به پایهٔ متعارف $\{e_1, \dots, e_n\}$ و با درایه‌های $a(i,j)$ در سطر i م و ستون j م باشد. دترمینان $[A]$ مساوی عدد

$$\det [A] = \sum s(j_1, \dots, j_n) a(1, j_1) a(2, j_2) \cdots a(n, j_n) \tag{83}$$

تعریف می‌شود. مجموع (۸۳) روی تمام n تاییهای مرتب $(j_1, \dots, j_n)$ از اعداد صحیح که $1 \le j_r \le n$ گرفته می‌شود.

بردارهای ستونی $\mathbf{x}_j$ از $[A]$ عبارتند از

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{n} a(i,j) \mathbf{e}_i \qquad (1 \le j \le n). \tag{84}$$

شایسته‌است که $\det [A]$ را به صورت تابعی از بردارهای ستونی $[A]$ تصور کنیم. چنانچه بنویسیم

$$\det (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \det [A],$$

حال det یک تابع حقیقی از مجموعهٔ جمیع n تاییهای مرتب از بردارها در R^n خواهد بود.

۹.۳۴ قضیه

(آ) هرگاه I عملگر همانی بر R^n باشد، آنگاه

$$\det [I] = \det (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

(ب) det یک تابع خطی از هر بردار ستونی $\mathbf{x}_j$ است در صورتی که بقیه ثابت گرفته شوند.

(پ) هرگاه $[A]_1$ از $[A]$ با تعویض دو ستون به دست آمده باشد، آنگاه

$$\det [A]_1 = -\det [A].$$

(ت) هرگاه $[A]$ دو ستون برابر داشته باشد، آنگاه $\det [A] = 0$.

برهان. هرگاه $A = I$ ، آنگاه $a(i, i) = 1$ و، به‌ازای $i \ne j$ ، $a(i,j) = 0$. از اینرو،

$$\det [I] = s(1, 2, \dots, n) = 1,$$

که (آ) را ثابت می‌کند. بنابر (۸۲)، $s(j_1, \ldots, j_n) = 0$ هرگاه دوتا از j ها مساوی باشند. هر یک از $n!$ حاصل ضرب باقیمانده در (۸۳) دقیقاً " یک سازه از هرستون را شامل است. این (ب) را ثابت می‌کند. قسمت (پ) نتیجهٔ مستقیم این مطلب است که $s(j_1, \ldots, j_n)$ در صورتی که دو تا j جایشان عوض شود تغییر علامت می‌دهد؛ و (ت) نتیجه‌ای از (پ) خواهد بود.

۳۵۰۹ قضیه. هرگاه $[A]$ و $[B]$ ماتریسهایی n در n باشند، آنگاه

$$\det([B][A]) = \det[B] \det[A].$$

برهان. اگر $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ ستونهای $[A]$ باشند، تعریف می‌کنیم

$$\Delta_B(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \Delta_B[A] = \det([B][A]). \tag{85}$$

ستونهای $[B][A]$ بردارهای $B\mathbf{x}_1, \ldots, B\mathbf{x}_n$ می‌باشند. از اینرو،

$$\Delta_B(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \det(B\mathbf{x}_1, \ldots, B\mathbf{x}_n). \tag{86}$$

بنابر (۸۶) وقضیهٔ ۳۴۰۹، Δ_B ازخواص ۳۴۰۹ (ب) تا (ت) نیز برخوردار است. برطبق (ب) و (۸۴)،

$$\Delta_B[A] = \Delta_B\left(\sum_i a(i, 1)\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\right) = \sum a(i, 1)\, \Delta_B(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n).$$

هرگاه این عمل برای $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ تکرار شود، خواهیم داشت

$$\Delta_B[A] = \sum a(i_1, 1)a(i_2, 2) \cdots a(i_n, n)\, \Delta_B(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}); \tag{87}$$

مجموع روی تمام n تاییهای مرتب $(i_1, \ldots, i_n)$، که $1 \le i_r \le n$، گرفته می‌شود. بنابر (پ) و (ت)،

$$\Delta_B(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}) = t(i_1, \ldots, i_n)\, \Delta_B(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \tag{88}$$

که در آن t مساوی 1، 0، یا -1 است؛ و چون $[B][I] = [B]$، (۸۵) نشان می‌دهد که

$$\Delta_B(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \det[B]. \tag{89}$$

با گذاردن (۸۹) و (۸۸) در (۸۷)، به ازای جمیع ماتریسهای n در n $[A]$ و $[B]$ خواهیم داشت

$$\det([B][A]) = \left\{\sum a(i_1, 1) \cdots a(i_n, n)t(i_1, \ldots, i_n)\right\} \det[B].$$

با فرض $B = I$ می‌بینیم که مجموع داخل دو ابرو در بالا مساوی $\det[A]$ است. این قضیه را ثابت خواهد کرد.

۳۶۰۹ قضیه. عملگر خطی A بر R^n معکوسپذیر است اگر و فقط اگر $\det [A] \neq 0$.

برهان. چنانچه A معکوسپذیر باشد، قضیهٔ ۳۵۰۹ نشان می‌دهد که

$$\det [A] \det [A^{-1}] = \det [AA^{-1}] = \det [I] = 1.$$

درنتیجه، $\det [A] \neq 0$.

هرگاه A معکوسپذیرنباشد، ستونهای $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ ماتریس $[A]$ نامستقل‌اند (قضیهٔ ۵۰۹). لذا، مثلاً، $\mathbf{x}_k$ ای هست بطوری که به ازای اسکالرهایی چون c_j

$$\mathbf{x}_k + \sum_{j \neq k} c_j \mathbf{x}_j = 0. \tag{90}$$

بنابر ۳۴۰۹ (ب) و (ت)، اگر $j \neq k$، $\mathbf{x}_k$ را می‌توان با $\mathbf{x}_k + c_j \mathbf{x}_j$ بدون تغییر دترمینان عوض کرد. با تکرار این کار در می‌یابیم که $\mathbf{x}_k$ را می‌شود با طرف چپ (۹۰)، یعنی با 0، بدون تغییر دترمینان عوض‌کرد. لکن ماتریسی که یکی از ستونهایش 0 باشد دترمینان 0 دارد. بنابراین، $\det [A] = 0$.

۳۷۰۹ تبصره. فرض کنیم $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ و $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ پایه‌هایی در R^n باشند. هر عملگر خطی A بر R^n ماتریسهای $[A]$ و $[A]_U$ با درایه‌های a_{ij} و α_{ij} را که با

$$A\mathbf{e}_j = \sum_i a_{ij} \mathbf{e}_i \ , \ A\mathbf{u}_j = \sum_i \alpha_{ij} \mathbf{u}_i$$

داده می‌شوند مشخص می‌کند. هرگاه $\mathbf{u}_j = B\mathbf{e}_j = \Sigma b_{ij} \mathbf{e}_i$، $A\mathbf{u}_j$ برابر است با

$$\sum_k \alpha_{kj} B\mathbf{e}_k = \sum_k \alpha_{kj} \sum_i b_{ik} \mathbf{e}_i = \sum_i \left(\sum_k b_{ik} \alpha_{kj} \right) \mathbf{e}_i$$

و نیز مساوی است با

$$AB\mathbf{e}_j = A \sum_k b_{kj} \mathbf{e}_k = \sum_i \left(\sum_k a_{ik} b_{kj} \right) \mathbf{e}_i.$$

پس $\Sigma b_{ik} \alpha_{kj} = \Sigma a_{ik} b_{kj}$، یا که

$$[B][A]_U = [A][B]. \tag{91}$$

چون B معکوسپذیر است، $\det [B] \neq 0$. از اینرو، (۹۱)، در تلفیق با قضیهٔ ۳۵۰۹، نشان خواهد داد که

$$\det [A]_U = \det [A]. \tag{92}$$

بنابراین، دترمینان ماتریس یک عملگر خطی به پایه‌ای که در ساختن ماتریس به کار رفته بستگی ندارد. **لذا، سخن از دترمینان یک عملگر خطی، بدون داشتن پایه‌ای در خاطر، بی‌معنی نخواهد بود.**

۳۸.۹ ژاکوبیها. چنانچه $\mathbf{f}$ مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ را بتوی R^n بنگارد و در نقطهٔ $\mathbf{x} \in E$ مشتقپذیر باشد، دترمینان عملگرخطی $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ را **ژاکوبی $\mathbf{f}$ در $\mathbf{x}$** خواهیم نامید. با علامات،

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \det \mathbf{f}'(\mathbf{x}). \tag{93}$$

ما از نماد

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \tag{94}$$

نیز برای $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$، درصورتی‌که $(y_1, \ldots, y_n) = \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n)$، استفاده‌خواهیم‌کرد.

برحسب ژاکوبیها، فرض قاطع در قضیهٔ تابع معکوس فرض $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$ است (قس. قضیهٔ ۳۶.۹). چنانچه قضیهٔ تابع ضمنی بر حسب توابع (۵۹) بیان شوند، فرضی که در مورد A شد به صورت

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$$

در خواهد آمد.

مشتقات مراتب بالاتر

۳۹.۹ تعریف. فرض‌کنیم f یک‌تابع حقیقی باشد که در مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ تعریف شده و مشتقات جزئیش $D_1 f, \ldots, D_n f$ باشند. هرگاه $D_j f$ ها خود مشتقپذیر باشند، **مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم** f با

$$D_{ij} f = D_i D_j f \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

تعریف می‌شوند. اگر تمام توابع $D_{ij} f$ در E پیوسته باشند، می‌گوییم f در E از ردهٔ $\mathscr{C}''$ است یا که $f \in \mathscr{C}''(E)$.

نگاشت $\mathbf{f}$ از E بتوی R^m را از ردهٔ $\mathscr{C}''$ گوییم هرگاه هر مؤلفهٔ $\mathbf{f}$ از ردهٔ $\mathscr{C}''$ باشد.

ممکن است در نقطه‌ای، $D_{ij} f \neq D_{ji} f$، درعین اینکه هر دو مشتق وجود دارند (ر. ک. تمرین ۲۷). با اینحال، در زیر خواهیم دید که هر موقع این مشتقها پیوسته باشند، $D_{ij} f = D_{ji} f$.

بخاطر سادگی (و بدون کاستن از کلیت) دو قضیهٔ بعدیمان را برای توابع حقیقی دو متغیره بیان می‌کنیم . اولینش قضیهٔ مقدار میانگین است .

۴۰.۹ قضیه. فرض کنیم f در مجموعهٔ بازی چون $E \subset R^2$ تعریف شده و $D_1 f$ و $D_{21} f$ در هرنقطهٔ E وجود داشته باشند. $Q \subset E$ را مستطیل بسته‌ای می‌انگاریم ، با اضلاعی موازی محورهای مختصات ، که (a, b) و $(a+h, b+k)$ را به عنوان رئوس متقابل دارد ($h \neq 0$ و $k \neq 0$). قرار می‌دهیم

$$\Delta(f, Q) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b).$$

در این صورت ، نقطه‌ای مانند (x, y) درون Q هست بطوری که

$$\Delta(f, Q) = hk(D_{21} f)(x, y). \tag{95}$$

به شباهت موجود بین رابطهٔ (۹۵) و قضیهٔ ۱۰.۵ توجه نمایید ؛ مساحت Q مساوی hk است .

برهان. قرار می‌دهیم $u(t) = f(t, b+k) - f(t, b)$. دوبار کار رفت قضیهٔ ۱۰.۵ نشان می‌دهد که x ی بین a و $a+h$ و y ی بین b و $b+k$ هست بطوری که

$$\begin{aligned}
\Delta(f, Q) &= u(a+h) - u(a) \\
&= hu'(x) \\
&= h[(D_1 f)(x, b+k) - (D_1 f)(x, b)] \\
&= hk(D_{21} f)(x, y).
\end{aligned}$$

۴۱.۹ قضیه. فرض کنیم f در مجموعهٔ بازی مثل $E \subset R^2$ تعریف شده است ، $D_1 f$ ، $D_{21} f$ ، و $D_2 f$ در هر نقطهٔ E وجود دارند ، و $D_{21} f$ در نقطه‌ای چون $(a, b) \in E$ پیوسته است .

در این صورت ، $D_{12} f$ در (a, b) وجود دارد و

$$(D_{12} f)(a, b) = (D_{21} f)(a, b). \tag{96}$$

نتیجه. $D_{21} f = D_{12} f$ اگر که $f \in \mathscr{C}''(E)$.

برهان. قرار می‌دهیم $A = (D_{21}f)(a, b)$ ، $\varepsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. اگر Q مستطیلی مثل مستطیل قضیهٔ ۹.۴۰، و h و k به قدر کافی کوچک باشند، به‌ازای هر $(x, y) \in Q$ خواهیم داشت

$$|A - (D_{21}f)(x, y)| < \varepsilon.$$

پس، بنابر (۹۵)،

$$\left|\frac{\Delta(f, Q)}{hk} - A\right| < \varepsilon.$$

h را ثابت می‌گیریم و فرض می‌کنیم $k \to 0$. چون D_2f در E وجود دارد، نامساوی آخر ایجاب می‌کند که

$$\left|\frac{(D_2f)(a+h, b) - (D_2f)(a, b)}{h} - A\right| \le \varepsilon. \tag{97}$$

چون ε دلخواه و (۹۷) به ازای تمام $h \neq 0$ های به قدر کافی کوچک برقرار است، نتیجه می‌شود که $(D_{12}f)(a, b) = A$. این (۹۶) را به دست خواهد داد.

مشتقگیری از انتگرالها

فرض کنیم φ یک تابع دو متغیره باشد که از آن بتوان نسبت به یک متغیر انتگرال و نسبت به دیگری مشتق گرفت. می‌پرسیم اگر این دو فرایند حدی به ترتیب عکس صورت گیرند، تحت چه شرایطی نتیجه یکسان است؟ سوال را دقیقتر مطرح می‌کنیم: تحت چه شرایطی بر φ می‌توان ثابت کرد که معادلهٔ

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \varphi(x, t)\, dx = \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x, t)\, dx \tag{98}$$

درست است؟ (مثال ناقض در تمرین ۲۸ داده شده است.)

شایسته است که از نماد

$$\varphi^t(x) = \varphi(x, t) \tag{99}$$

استفاده نماییم. لذا، φ^t، به ازای هر t، یک تابع یک متغیره خواهد بود.

۹.۴۲ قضیه. فرض کنیم

(آ) $\varphi(x, t)$ **به ازای** $a \le x \le b$ و $c \le t \le d$ **تعریف شده باشد؛**

(ب) α **یک تابع صعودی بر** $[a, b]$ **باشد؛**

(پ) به‌ازای هر $t \in [c, d]$ ، $\varphi^t \in \mathscr{R}(\alpha)$ ؛

(ت) $c < s < d$ ، و به هر $\varepsilon > 0$ ، δ ای بزرگتر از 0 قسمی نظیر شده باشد که به‌ازای هر $x \in [a, b]$ و هر $t \in (s - \delta, s + \delta)$ ،

$$|(D_2 \varphi)(x, t) - (D_2 \varphi)(x, s)| < \varepsilon.$$

تعریف می‌کنیم

$$f(t) = \int_a^b \varphi(x, t)\, d\alpha(x) \qquad (c \leq t \leq d). \tag{100}$$

در این صورت ، $(D_2 \varphi)^s \in \mathscr{R}(\alpha)$ ، $f'(s)$ وجود دارد ، و

$$f'(s) = \int_a^b (D_2 \varphi)(x, s)\, d\alpha(x). \tag{101}$$

توجه کنید که (پ) فقطحکم به وجود انتگرالهای (۱۰۰) به‌ازای هر $t \in [c, d]$ دارد . و نیز توجه‌دارید که (ت) هر وقت $D_2 \varphi$ بر مستطیلی که φ بر آن تعریف شده پیوسته باشد بیقین برقرار است .

برهان . خارج قسمتهای تفاضلی

$$\psi(x, t) = \frac{\varphi(x, t) - \varphi(x, s)}{t - s}$$

را به‌ازای $0 < |t - s| < \delta$ درنظرمی‌گیریم . بنابرقضیهٔ ۵.۱۰ ، نظیر هر (x, t) عددی مانند u بین s و t هست بطوری که

$$\psi(x, t) = (D_2 \varphi)(x, u).$$

لذا ، (ت) ایجاب خواهد کرد که

$$|\psi(x, t) - (D_2 \varphi)(x, s)| < \varepsilon \qquad (a \leq x \leq b, \quad 0 < |t - s| < \delta). \tag{102}$$

توجه کنید که

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \int_a^b \psi(x, t)\, d\alpha(x). \tag{103}$$

بنابر (۱۰۲) ، وقتی $t \to s$ ، $\psi^t \to (D_2 \varphi)^s$ به طور یکنواخت بر $[a, b]$. و چون هر $\psi^t \in \mathscr{R}(\alpha)$ ، نتیجهٔ مطلوب از (۱۰۳) و قضیهٔ ۱۶.۷ حاصل خواهد شد .

۴۳.۹ مثال . البته ، می‌توان مشابه قضیهٔ ۴۲.۹ را با $(-\infty, \infty)$ به جای $[a, b]$ اثبات

کرد . بــه عــوض این کار فقط به یک مثال اکتفا خواهیم کرد . به ازای $-\infty < t < \infty$ تعریف می‌کنیم

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos (xt)\, dx \tag{104}$$

و

$$g(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} \sin (xt)\, dx . \tag{105}$$

هردوانتگرال وجوددارند (و به طور مطلق همگرا هستند) ، زیرا مقادیر مطلق انتگرالدهها بترتیب حدا کثر $\exp(-x^2)$ و $|x| \exp(-x^2)$ می‌باشند .

توجه کنید که g از f با مشتقگیری از انتگرالده نسبت به t به دست می‌آید . حکم می‌کنیم که f مشتقپذیر است و

$$f'(t) = g(t) \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{106}$$

برای اثبات این مطلب ، ابتدا خارج قسمتهای تفاضلی کسینوس را مورد بررسی قرار می‌دهیم : گوییم هرگاه $\beta > 0$ ، آنگاه

$$\frac{\cos (\alpha + \beta) - \cos \alpha}{\beta} + \sin \alpha = \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\alpha+\beta} (\sin \alpha - \sin t)\, dt. \tag{107}$$

چون $|\sin \alpha - \sin t| \le |t - \alpha|$ ، قدرمطلق طرف راست (۱۰۷) حداکثر $\beta/2$ است . حالت $\beta < 0$ به همین نحو بررسی خواهد شد . لذا،به ازای هر β (چنانچه سمت چپ نامساوی زیر وقتی $\beta = 0$ صفر تعبیر شود)،

$$\left| \frac{\cos (\alpha + \beta) - \cos \alpha}{\beta} + \sin \alpha \right| \le |\beta|. \tag{108}$$

حال t و $h \neq 0$ را ثابت نگه می‌داریم . رابطهٔ (۱۰۸) را به ازای $\alpha = xt$ و $\beta = xh$ به کار می‌بریم . از (۱۰۴) و (۱۰۵) نتیجه خواهد شد که

$$\left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - g(t) \right| \le |h| \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx .$$

بنابراین، وقتی $h \to 0$ ، رابطهٔ (۱۰۶) به دست خواهد آمد .

حال قدمی فراتر می‌گذاریم . انتگرالگیری به‌طریقهٔ جزء به‌جزء ، به کار رفته در (۱۰۴)، نشان می‌دهد که

$$f(t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} \frac{\sin (xt)}{t}\, dx. \tag{109}$$

لذا، $tf(t) = -2g(t)$ ، ودراین‌حال (۱۰۶) ایجاب می‌کندکه f در معادلهٔ دیفرانسیل

$$2f''(t) + tf(t) = 0 \tag{110}$$

صدق نماید. اگر این معادلهٔ دیفرانسیل را حل و از این مطلب که $f(0) = \sqrt{\pi}$ استفاده کنیم (ر.ک. بخش ۲۱۰۸)، در می‌یابیم که

$$f(t) = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right). \tag{111}$$

بنابراین، انتگرال (۱۰۴) به طور صریح معین خواهد بود.

تمرین

۱. هرگاه S یک زیرمجموعهٔ ناتهی فضای برداری X باشد، ثابت کنید (همانطور که در بخش ۱۰۹ حکم شد) پیمای S یک فضای برداری است.

۲. ثابت کنید (همانطورکه‌دربخش ۶۰۹ حکم‌شد) اگر A و B تبدیلاتی خطی باشند، BA نیز خطی است. همچنین، ثابت کنید A^{-1} خطی و معکوسپذیر است.

۳. فرض‌کنید $A \in L(X, Y)$ و $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ فقط‌وقتی $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ثابت کنید که در این صورت A یک به یک است.

۴. ثابت‌کنید (همانطورکه در بخش ۳۰۰۹ حکم شد) فضاهای پوچ و بردهای تبدیلات خطی فضاهایی برداری‌اند.

۵. ثابت کنید به هر $A \in L(R^n, R^1)$ یک $y \in R^n$ منحصر بفرد چنان نظیر است‌که $A\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. همچنین، ثابت کنید که $\|A\| = |\mathbf{y}|$.

راهنمایی: در نامساوی شوارتز تحت شرایطی تساوی برقرار است.

۶. هرگاه $f(0, 0) = 0$ و،

اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ ،

ثابت‌کنید، بااینکه f در $(0, 0)$ پیوسته‌نیست، $(D_1 f)(x, y)$ و $(D_2 f)(x, y)$ در هر نقطهٔ R^2 وجود دارند.

۷. فرض‌کنید f یک تابع حقیقی باشد که در مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ تعریف‌شده‌و مشتقات جزئی $D_1 f, \ldots, D_n f$ در E کراندارانند. ثابت کنید f در E پیوسته است.

راهنمایی: مثل برهان قضیهٔ ۲۱۰۹ عمل کنید.

۸. فرض کنید f یک تابع حقیقی مشتقپذیر در مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ باشد و f درنقطهٔ

$\mathbf{x} \in E$ ماکزیمم موضعی داشته باشد. ثابت کنید $f'(\mathbf{x}) = 0$.

۹ . ثابت کنید که اگر $\mathbf{f}$ یک نگاشت مشتقپذیر از مجموعهٔ باز و **همبند** $E \subset R^n$ بتوی R^m بوده و به ازای هر $\mathbf{x} \in E$ ، $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 0$ ، $\mathbf{f}$ در E ثابت می‌باشد.

۱۰ . هرگاه f یک تابع حقیقی است که در مجموعهٔ باز و محدب $E \subset R^n$ قسمی تعریف شده که به ازای هر $\mathbf{x} \in E$ ، $(D_1 f)(\mathbf{x}) = 0$ ، ثابت کنید $f(\mathbf{x})$ فقط به $x_2, \ldots, x_n$ بستگی خواهد داشت.

نشان دهیدکه تحدب E را می‌توان با شرط ضعیفتری عوض کرد، لکن این کار محتاج شرطی خواهد بود. به‌عنوان‌مثال ،اگر $n = 2$ و E شبیه نعل‌اسب باشد، حکم ممکن است درست نباشد.

۱۱ . هرگاه f و g توابعی حقیقی و مشتقپذیر در R^n باشند، ثابت کنید

$$\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\,\nabla f$$

و، اگر $f \neq 0$ ، $\nabla(1/f) = -f^{-2}\nabla f$.

۱۲ . دو عدد حقیقی a و b را که $0 < a < b$ ثابت بگیرید. نگاشت $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ بر R^2 بتوی R^3 را با

$$f_1(s, t) = (b + a\cos s)\cos t$$
$$f_2(s, t) = (b + a\cos s)\sin t$$
$$f_3(s, t) = a\sin s$$

تعریف‌کنید .برد K ی $\mathbf{f}$ را توصیف نمایید. (این یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ R^3 است.)

(آ) نشان دهید که درست 4 نقطه مثل $\mathbf{p} \in K$ هست که

$$(\nabla f_1)(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})) = \mathbf{0}.$$

این نقاط را بیابید.

(ب) مجموعهٔ تمام $\mathbf{q} \in K$ ها یی را تعیین کنید که

$$(\nabla f_3)(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{q})) = \mathbf{0}.$$

(پ) نشان دهید که یکی از نقاط $\mathbf{p}$ ی قسمت (آ) نظیر یک ماکزیمم موضعی f_1 است، یکی نظیر یک مینیمم موضعی است، و دوتای دیگر نه این هستند و نه آن (آنها را اصطلاحا "نقاط زینی" می‌خوانند).

کدام نقاط $\mathbf{q}$ ی قسمت (ب) نظیر ماکزیمم یا مینیمم‌اند؟

(ت) λ را عددی گنگ انگاشته تعریف کنید $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(t, \lambda t)$. ثابت کنید

g یک نگاشت ۱ ــ ۱ از R^1 بروی زیر مجموعهٔ چگالی از K است . ثابت کنید

$$|g'(t)|^2 = a^2 + \lambda^2(b + a\cos t)^2.$$

۱۳ . فرض کنید f یک نگاشت مشتقپذیر از R^1 بتوی R^3 باشد بطوری که به ازای هر t ، $|f(t)| = 1$. ثابت کنید $f'(t)\cdot f(t) = 0$.
این نتیجه را تعبیر هندسی نمایید .

۱۴ . تعریف کنید $f(0,0) = 0$ و ،
اگر $(x,y) \neq (0,0)$ ، $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$.

(آ) ثابت کنید D_1f و D_2f توابع کرانداری در R^2 اند . (درنتیجه ، f پیوسته می‌باشد .)

(ب) فرض کنید u برداریکهٔ دلخواهی در R^2 باشد . نشان دهید که مشتق جهتی $(D_uf)(0,0)$ وجود دارد و قدر مطلقش حداکثر یک است .

(پ) فرض کنید γ یک نگاشت مشتقپذیر از R^1 بتوی R^2 باشد (به عبارت دیگر ، γ یک منحنی مشتقپذیر در R^2 باشد) با این خاصیت که $\gamma(0) = (0,0)$ و $|\gamma'(0)| > 0$.
قرار دهید $g(t) = f(\gamma(t))$ ، و ثابت کنید g به ازای هر $t \in R^1$ مشتقپذیر است.
چنانچه $\gamma \in \mathscr{C}'$ ، ثابت کنید $g \in \mathscr{C}'$.

(ت) با این وجود ، ثابت کنید f در $(0,0)$ مشتقپذیر نیست .
راهنمایی : فرمول (۴۰) برقرار نیست .

۱۵ . تعریف کنید $f(0,0) = 0$ و ، اگر $(x,y) \neq (0,0)$ ، قرار دهید

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2}.$$

(آ) ثابت کنید به ازای هر $(x,y) \in R^2$

$$4x^4y^2 \leq (x^4+y^2)^2,$$

و نتیجه بگیرید که f پیوسته می‌باشد .

(ب) به ازای $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $-\infty < t < \infty$ تعریف کنید

$$g_\theta(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta).$$

نشان دهید که $g_\theta(0) = 0$ ، $g'_\theta(0) = 0$ ، و $g''_\theta(0) = 2$. لذا ، هر g_θ یک مینیمم موضعی اکید در $t = 0$ دارد .

به عبارت دیگر ، تحدید f به هر خط مار بر $(0,0)$ مینیمم موضعی اکیدی در

$(0, 0)$ خواهد داشت.

(پ) نشان دهید که با اینحال $(0, 0)$ یک مینیمم موضعی برای f نیست، چونکه $f(x, x^2) = -x^4$.

۱۶. نشان دهید که در قضیهٔ تابع معکوس، پیوستگی $\mathbf{f}'$ در نقطهٔ $\mathbf{a}$، حتی در حالت $n = 1$، ضروراست: هرگاه به ازای $t \neq 0$

$$f(t) = t + 2t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right),$$

و $f(0) = 0$، آنگاه $f'(0) = 1$، f' در $(-1, 1)$ کرانـدار است، ولی f در هیچ همسایگی 0 یک به یک نمی‌باشد.

۱۷. فرض کنید $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ نگاشتی از R^2 بتوی R^2 باشد که با

$$f_1(x, y) = e^x \cos y, \qquad f_2(x, y) = e^x \sin y$$

داده شده است.

(آ) برد $\mathbf{f}$ چیست؟

(ب) نشان دهید که ژاکوبی $\mathbf{f}$ درهیچ‌نقطه‌از R^2 صفرنیست. لذا، هرنقطهٔ R^2 همسایگیی دارد که در آن $\mathbf{f}$ یک به یک است. با اینحال، $\mathbf{f}$ بر R^2 یک به یک نمی‌باشد.

(پ) قراردهید $\mathbf{a} = (0, \pi/3)$، $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$، و فرض‌کنید $\mathbf{g}$ معکوس پیوستهٔ $\mathbf{f}$ باشد که در همسایگی $\mathbf{b}$ تعریف شده بطوری که $\mathbf{g}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$. برای $\mathbf{g}$ فرمول صـریحی بیابیـد، $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ و $\mathbf{g}'(\mathbf{b})$ را حساب کنید، و صحت فرمول (۵۲) را تحقیق نمایید.

(ت) نقشهای خطوط موازی محورهای مختصات تحت $\mathbf{f}$ چه می‌باشند؟

۱۸. به سوٴالات مشابه در مورد نگاشتی که با

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

تعریف شده پاسخ دهید.

۱۹. نشان دهید که دستگاه معادلات

$$3x + y - z + u^2 = 0$$
$$x - y + 2z + u = 0$$
$$2x + 2y - 3z + 2u = 0$$

را می‌توان نسبت به x, y, u و برحسب z؛ نسبت به x, z, u و برحسب y؛ نسبت به y, z, u وبرحسب x حل کرد؛ لیکن حل آن نسبت به x, y, z وبرحسب u میسور نیست.

۲۰ . در قضیهٔ تابع ضمنی n و m را یک گرفته، قضیه (و برهانش) را به طور هندسی تعبیر کنید .

۲۱ . f را در R^2 با $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$ تعریف کنید .

(آ) چهار نقطه در R^2 بیابید که گرادیان f در آنها صفر باشد . نشان دهید که f در R^2 درست یک ماکزیمم موضعی و یک مینیمم موضعی دارد .

(ب) فرض کنید S مجموعهٔ تمام $(x, y) \in R^2$ هایی باشد که در آنها $f(x, y) = 0$. آن نقاطی از S را بیابید که همسایگیی که در آن بشود معادلهٔ $f(x, y) = 0$ را نسبت به y و برحسب x (یا نسبت به x و برحسب y) حل کرد ندارند . S را تا جایی که می‌توانید دقیق توصیف کنید .

۲۲ . شبیه این بحث را در مورد

$$f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3x^2 + 3y^2$$

بنمایید .

۲۳ . f را در R^3 با

$$f(x, y_1, y_2) = x^2y_1 + e^x + y_2$$

تعریف کنید . نشان دهید که $f(0, 1, -1) = 0, (D_1f)(0, 1, -1) \neq 0$ ، و لذا ، تابع مشتقپذیری چون g در یکی از همسایگیهای $(1, -1)$ در R^2 هست بطوری که $g(1, -1) = 0$ و

$$f(g(y_1, y_2), y_1, y_2) = 0 .$$

$(D_1g)(1, -1)$ و $(D_2g)(1, -1)$ را پیدا کنید .

۲۴ . به ازای $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ را با

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad f_2(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

تعریف کنید . رتبهٔ $\mathbf{f}'(x, y)$ را حساب کرده برد f را بیابید .

۲۵ . فرض کنید که $A \in L(R^n, R^m)$ و r رتبهٔ A باشد .

(آ) S را مثل S برهان قضیهٔ ۳۲۰۹ تعریف کنید . نشان دهید که SA تصویری در R^n است که فضای پوچش $\mathscr{N}(A)$ وبردش $\mathscr{R}(S)$ می‌باشد . **راهنمایی .** بنابر (۶۸) ، $SASA = SA$.

(ب) با استفاده از (آ) نشان دهید که

$$\dim \mathscr{N}(A) + \dim \mathscr{R}(A) = n .$$

۲۶ . نشان دهید که وجود $D_{12}f$ (و حتی پیوستگی) وجود $D_{21}f$ را ایجاب نمی‌کند. به عنوان مثال، فرض کنید $f(x, y) = g(x)$ که در آن g هیچ‌جا مشتقپذیر نیست .

۲۷ . قرار دهید $f(0, 0) = 0$ و، اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ،

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}.$$

ثابت کنید

(آ) f ، D_1f ، D_2f در R^2 پیوسته‌اند؛

(ب) $D_{12}f$ و $D_{21}f$ در هر نقطه از R^2 وجود داشته‌و، جزدر $(0, 0)$ ، پیوسته می‌باشند؛

(پ) $(D_{12}f)(0, 0) = 1$ و $(D_{21}f)(0, 0) = -1$.

۲۸ . به ازای $t \geq 0$ قرار دهید

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \sqrt{t}) \\ -x + 2\sqrt{t} & (\sqrt{t} \leq x \leq 2\sqrt{t}) \\ 0 & (\text{در غیر این صورت}), \end{cases}$$

و، اگر $t < 0$ ، قرار دهید $\varphi(x, t) = -\varphi(x, |t|)$.

نشان دهید که φ بر R^2 پیوسته است و، به ازای هر x ،

$$(D_2\varphi)(x, 0) = 0.$$

تعریف کنید

$$f(t) = \int_{-1}^{1} \varphi(x, t)\, dx.$$

نشان دهید که که اگر $|t| < \frac{1}{4}$ ، $f(t) = t$ ؛ درنتیجه،

$$f'(0) \neq \int_{-1}^{1} (D_2\varphi)(x, 0)\, dx.$$

۲۹ . فرض کنید E مجموعهٔ بازی در R^n باشد. رده‌های $\mathscr{C}'(E)$ و $\mathscr{C}''(E)$ در متن تعریف شده‌اند. $\mathscr{C}^{(k)}(E)$ را می‌توان برای جمیع اعداد صحیح و مثبت k به استقرا تعریف کرد: وقتی می‌گوییم $f \in \mathscr{C}^{(k)}(E)$ یعنی که مشتقات جزئی $D_1f, \ldots, D_nf$ متعلق‌به $\mathscr{C}^{(k-1)}(E)$ می‌باشند.

فرض کنید $f \in \mathscr{C}^{(k)}(E)$ ، و (با به‌کارگیری مکرر قضیهٔ ۹ ۴۱) نشان دهید که مشتق مرتبهٔ k ام

$$D_{i_1 i_2 \ldots i_k}f = D_{i_1}D_{i_2} \ldots D_{i_k}f$$

با جایگشت زیرنویسهای $i_1, \ldots, i_k$ بلا تغییر است.

به عنوان مثال، هرگاه $n \geq 3$ ، آنگاه به ازای هر $f \in \mathscr{C}^{(4)}$

$$D_{1213}f = D_{3112}f.$$

۳۰ . فرض‌کنید $f \in \mathscr{C}^{(m)}(E)$ که‌درآن E زیرمجموعهٔ بازی‌از R^n است . $a \in E$ را ثابت گرفته فرض کنید $x \in R^n$ آنقدر به 0 نزدیک باشد که نقاط

$$p(t) = a + tx,$$

به ازای $0 \leq t \leq 1$، در E قرار گیرند . به ازای هر $t \in R^1$ که $p(t) \in E$ تعریف کنید

$$h(t) = f(p(t)).$$

(آ) به ازای $1 \leq k \leq m$ (با به کارگیری مکرر قاعدهٔ زنجیره‌ای) نشان دهید که

$$h^{(k)}(t) = \sum (D_{i_1 \ldots i_k}f)(p(t))\, x_{i_1} \ldots x_{i_k}.$$

مجموع روی تمام k تاییهای مرتب $(i_1, \ldots, i_k)$ ای‌گرفته‌شده که درآنها هر i_j یکی از اعداد صحیح $1, \ldots, n$ است .

(ب) بنابر قضیهٔ تیلور (۱۵۰۵) ، به ازای $t \in (0, 1)$ ای

$$h(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} + \frac{h^{(m)}(t)}{m!}.$$

از این استفاده‌کرده قضیهٔ تیلور در حالت n متغیر را ثابت نمایید به این طریق که نشان دهید فرمول

$$f(a + x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum (D_{i_1 \ldots i_k}f)(a)x_{i_1} \ \ldots x_{i_k} + r(x)$$

$f(a + x)$ را به صورت مجموع "چندجمله‌ای تیلور از درجهٔ $m-1$"اش بعلاوهٔ باقیمانده‌ای که در

$$\lim_{x \to 0} \frac{r(x)}{|x|^{m-1}} = 0$$

صدق می‌کند نمایش می‌دهد .

هریک ازمجموعهای داخلی روی‌تمام k تاییهای مرتب $(i_1, \ldots, i_k)$ ، مثل k تاییهای قسمت (آ) ، گرفته می‌شود . طبق معمول ، مشتق مرتبهٔ صفر f فقط f است . در نتیجه، جملهٔ ثابت چندجمله‌ای تیلور f در a ، $f(a)$ خواهد بود .

(پ) تمرین ۲۹ نشان می‌دهد که در چند جمله‌ای تیلور ، بصورتی که در قسمت (ب) نوشته شده ، تکرار روی می‌دهد . برای مثال ، D_{113} سه بار ، به صورت D_{113} ،

D_{131} ، و D_{311} ، ظاهر می‌شود. مجموع سه جملهٔ نظیر را می‌توان به شکل

$$3(D_1^2 D_3 f)(\mathbf{a})x_1^2 x_3$$

نوشت. ثابت‌کنید (با محاسبهٔ دفعاتی که هر مشتق ظاهر می‌شود) که چند جمله‌ای تیلور در (ب) را می‌شود به شکل

$$\sum \frac{(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n} f)(\mathbf{a})}{s_1! \cdots s_n!} x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}$$

نوشت. در اینجا جمعبندی روی تمام n تاییهای مرتب $(s_1, \ldots, s_n)$ گرفته‌می‌شود بطوری که هر s یک عدد صحیح نامنفی است و $s_1 + \cdots + s_n \leq m - 1$.

۳۱. فرض کنید در همسایگیی از $\mathbf{a} \in R^2$ ، $f \in \mathscr{C}^{(3)}$ ، گردایان f در $\mathbf{a}$ مساوی $\mathbf{0}$ باشد، ولی همهٔ مشتقات مرتبهٔ دوم f در $\mathbf{a}$ صفر نباشد. در این صورت، نشان دهید که چگونه می‌توان از چند جمله‌ای تیلور f در $\mathbf{a}$ (از درجهٔ 2) پی برد که f در $\mathbf{a}$ دارای ماکزیمم موضعی، یا مینیمم موضعی، و یا هیچکدام است.

این مطلب را به R^n در عوض R^2 تعمیم دهید.

۱۰

انتگرالگیری از فرمهای دیفرانسیل

انتگرالگیری را می‌توان در سطوح بسیاری مطرح کرد. در فصل ۶ این نظریه برای توابعی که بر زیربازه‌های خط حقیقی تا حد معقولی خوشرفتارند عرضه شده بود. در فصل ۱۱ با نظریهٔ انتگرالگیری بسیار پیشرفته‌ای مواجه می‌شویم که می‌تواند در مورد رده‌های بسیار وسیعتری از توابع که قلمروهایشان بیش و کم مجموعه‌های دلخواهی هستند و الزاماً" زیر-مجموعه‌هایی از R^n نیستند قابل اعمال باشد. فصل حاضر به جنبه‌هایی از نظریهٔ انتگرالگیری اختصاص یافته که با هندسهٔ فضاهای اقلیدسی، نظیر فرمول تغییر متغیرها، انتگرالهای خط، و دستگاه فرمهای دیفرانسیل که در صورت و در برهان مشابه n بعدی قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، یعنی قضیهٔ استوکس[1]، به کار رفته ارتباط نزدیکی دارند.

انتگرالگیری

۱۰۰۱ تعریف. فرض کنیم I^k یک حجرهٔ k بعدی در R^k مشتمل بر تمام

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$$

هایی باشد که

$$a_i \le x_i \le b_i \qquad (i = 1, \ldots, k), \tag{1}$$

---

1. Stokes

I^j حجره‌ٔ j بعدی در R^j باشد که با j نامساوی اول (۱) تعریف می‌شود، و f یک تابع پیوسته‌ٔ حقیقی بر I^k باشد.

قرار می‌دهیم $f=f_k$ ، و f_{k-1} را بر I^{k-1} با

$$f_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \int_{a_k}^{b_k} f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)\, dx_k$$

تعریف می‌کنیم. پیوستگی یکنواخت f_k بر I^k نشان می‌دهد که f_{k-1} بر I^{k-1} پیوسته است. لذا، می‌توان این فرایند را تکرار کرد و توابع f_j ، پیوسته بر I^j را به دست آورد بطوری که f_{j-1} انتگرال f_j نسبت به x_j روی $[a_j, b_j]$ باشد. پس از k مرحله به **عددی** مانند f_0 می‌رسیم که آن را **انتگرال** f **روی** I^k می‌نامیم. این عدد را به شکل

$$\int_{I^k} f \quad \text{یا} \quad \int_{I^k} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{2}$$

خواهیم نوشت.

بی‌آزمایش معلوم می‌شود که این تعریف انتگرال به ترتیبی که با آن k انتگرالگیری صورت می‌گیرد بستگی دارد. لکن این بستگی فقط مشهود است. برای اثبات آن، نماد موقت $L(f)$ را برای انتگرال (۲) معرفی کرده $L'(f)$ را حاصل انجام k انتگرالگیری با ترتیبی دیگر می‌انگاریم.

۱۰・۲ قضیه. به ازای هر $f \in \mathscr{C}(I^k)$ ، $L(f) = L'(f)$.

برهان. هرگاه $h(\mathbf{x}) = h_1(x_1) \cdots h_k(x_k)$ ، که در آن $h_j \in \mathscr{C}([a_j, b_j])$ ، آنگاه

$$L(h) = \prod_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} h_i(x_i)\, dx_i = L'(h).$$

هرگاه $\mathscr{A}$ مجموعه‌ٔ تمام مجموعهای متناهی این h ها باشد، نتیجه می‌شود که به ازای هر $g \in \mathscr{A}$ ، $L(g) = L'(g)$. همچنین، $\mathscr{A}$ جبری است از توابع بر I^k که قضیه‌ٔ استون ـ وایراشتراس در باب‌ش قابل اجراست.

قرار می‌دهیم $V = \prod_1^k (b_i - a_i)$. هرگاه $f \in \mathscr{C}(I^k)$ و $\varepsilon > 0$ ، $g \in \mathscr{A}$ ای هست بطوری که $\|f-g\| < \varepsilon/V$ ، که در آن $\|f\|$ مساوی $\max |f(\mathbf{x})| \; (\mathbf{x} \in I^k)$ تعریف

می‌شود. دراین‌صورت، $|L(f-g)| < \varepsilon$ ، $|L'(f-g)| < \varepsilon$ ، و چون

$$L(f) - L'(f) = L(f-g) + L'(g-f),$$

نتیجه می‌گیریم که

$$|L(f) - L'(f)| < 2\varepsilon.$$

تمرین ۲ در ارتباط با این موضوع است.

۱۰.۳ تعریف. تکیه‌گاه تابع (حقیقی یا مختلط) f بر R^k بست مجموعهٔ تمام نقاطی چون $\mathbf{x} \in R^k$ است که در آن $f(\mathbf{x}) \neq 0$. بااین فرض که f تابع پیوسته‌ای با تکیه‌گاه فشرده است، I^k را یک حجرهٔ k بعدی دلخواه می‌گیریم که شامل تکیه‌گاه f باشد، و تعریف می‌کنیم

$$\int_{R^k} f = \int_{I^k} f. \tag{3}$$

انتگرالی که به این صورت تعریف شود بوضوح از انتخاب I^k مستقل است فقط به شرط آنکه I^k شامل تکیه‌گاه f باشد.

حال اغوا می‌شویم تعریف انتگرال روی R^k را به تابعهایی که (بنوعی) حدود توابع پیوسته با تکیه‌گاه فشرده‌اند تعمیم دهیم. ما نمی‌خواهیم شرایطی را که تحت آنها این کار میسر است مطرح نماییم؛ جای مناسب برای این موضوع انتگرال لبگ است. ما فقط یک مثال بسیار ساده را که در برهان قضیهٔ استوکس به کار می‌رود وصف خواهیم کرد.

۱۰.۴ مثال. فرض کنیم Q^k سادک k بعدی باشد که از تمام نقاط $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ در R^k که در آنها $x_1 + \cdots + x_k \leq 1$ و به ازای $i = 1, \ldots, k$ ، $x_i \geq 0$ ، تشکیل شده است. هرگاه، مثلاً"، $k = 3$ ، Q^k یک چهار وجهی است با رئوسی در $0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. اگر $f \in \mathscr{C}(Q^k)$ ، f را با فرض $f(\mathbf{x}) = 0$ خارج Q^k به تابعی بر I^k تعمیم می‌دهیم، و تعریف می‌کنیم

$$\int_{Q^k} f = \int_{I^k} f. \tag{4}$$

در اینجا I^k "مکعب یکه" است که با

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad (1 \leq i \leq k)$$

تعریف می‌شود.

چون f ممکن است بر I^k ناپیوسته باشد، وجود انتگرال سمت راست (۴) محتاج برهان خواهد بود. همچنین، مایلیم نشان دهیم که این انتگرال از ترتیبی که با آن k انتگرالگیری

صورت می‌گیرد مستقل است.

برای این کار فرض می‌کنیم $0 < \delta < 1$، قرار می‌دهیم

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & (t \le 1-\delta) \\ \dfrac{(1-t)}{\delta} & (1-\delta < t \le 1) \\ 0 & (1 < t), \end{cases} \tag{5}$$

و تعریف می‌کنیم

$$F(\mathbf{x}) = \varphi(x_1 + \cdots + x_k) f(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in I^k). \tag{6}$$

در این صورت، $F \in \mathscr{C}(I^k)$.

قرار می‌دهیم $\mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_{k-1})$ و $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, x_k)$. به‌ازای هر $\mathbf{y} \in I^{k-1}$، مجموعهٔ تمام x_k هایی که $F(\mathbf{y}, x_k) \ne f(\mathbf{y}; x_k)$ یا تهی است و یا قطعه است که طولش از δ تجاوز نمی‌کند. چون $0 \le \varphi \le 1$، نتیجه می‌شود که

$$|F_{k-1}(\mathbf{y}) - f_{k-1}(\mathbf{y})| \le \delta \|f\| \qquad (\mathbf{y} \in I^{k-1}), \tag{7}$$

که در آن $\|f\|$ همان معنی داشته در برهان قضیهٔ ۲۰۱۰ را دارد و F_{k-1} و f_{k-1} همانهای بوده در تعریف ۱۰۱۰ می‌باشند.

وقتی $\delta \to 0$، نامساوی (۷) f_{k-1} را به صورت حد یکنواختی از یک دنباله از توابع پیوسته نمایش می‌دهد. لذا، $f_{k-1} \in \mathscr{C}(I^{k-1})$، وانتگرالگیریهای بیشتر مشکلی ایجاد نخواهند کرد.

این وجود انتگرال (۴) را ثابت می‌کند. مضاف بر این، (۷) نشان خواهد داد که

$$\left| \int_{I^k} F(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{I^k} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| \le \delta \|f\|. \tag{8}$$

توجه کنید که (۸)، بی‌اعتنا به ترتیبی که k انتگرالگیری صورت می‌گیرد، درست است. چون $F \in \mathscr{C}(I^k)$، با هرتغییری در این ترتیب $\int F$، دست نمی‌خورد. از اینرو، (۸) صحت همین مطلب را برای $\int f$ نشان خواهد داد.

این برهان را تمام خواهد کرد.

هدف بعدی ما فرمول تغییر متغیرهاست که در قضیهٔ ۹۰۱۰ بیان شد. برای تسهیل در اثباتش، ابتدا نگاشتهای اولیه و افزارهای واحد را مطرح می‌کنیم. نگاشتهای اولیه ما را قادر می‌سازند تا از عمل موضعی یک $\mathscr{C}'$ نگاشت با مشتق معکوسپذیر تصویری روشنتر بیابیم، و افرازهای واحد ابزارهایی بسیار مفید هستند که استفاده از اطلاعات موضعی را در یک محدودهٔ کلی ممکن خواهند ساخت.

نگاشتهای اولیه

۵۰۱۰ تعریف . هرگاه G مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ را بتوی R^n نگاشته ، وعدد صحیح m وتابع حقیقی g با قلمرو E وجود داشته باشند بطوری که

$$G(x) = \sum_{i \neq m} x_i e_i + g(x) e_m \qquad (x \in E), \tag{9}$$

آنگاه G را یک *اولیه* خواهیم نامید . لذا ، یک نگاشت اولیه نگاشتی است که حداکثر یک مختص را تغییر می‌دهد . توجه کنید که (۹) را می‌توان
به شکل

$$G(x) = x + [g(x) - x_m] e_m \tag{10}$$

نیز نوشت .

اگر g در نقطه‌ای مانند $a \in E$ مشتقپذیر باشد ، G نیزچنین‌است . ماتریس $[\alpha_{ij}]$ عملگر $G'(a)$ سطر m مش به صورت

$$(D_1 g)(a), \ldots, (D_m g)(a), \ldots, (D_n g)(a) \tag{11}$$

می‌باشد . به ازای $j \neq m$ داریم $\alpha_{jj} = 1$ و ، اگر $i \neq j$ ، $\alpha_{ij} = 0$. لذا ، ژاکوبی G در a با

$$J_G(a) = \det[G'(a)] = (D_m g)(a) \tag{12}$$

داده‌خواهد شد ، و (برطبق قضیهٔ ۳۶۰۹) مشاهده می‌شود که $G'(a)$ ***معکوسپذیر است اگر و فقط اگر*** $(D_m g)(a) \neq 0$.

۶۰۱۰ تعریف . عملگر خطی B بر R^n که جفتی از اعضای پایهٔ متعارف را با هم عوض کرده بقیه را ثابت بگذارد یک **ضربه** نام یافته است .

برای مثال ، ضربهٔ B بر R^4 که e_2 و e_4 را با هم عوض می‌کند از شکل

$$B(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) = x_1 e_1 + x_2 e_4 + x_3 e_3 + x_4 e_2 \tag{13}$$

و یا ، معادلا" ، از شکل

$$B(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) = x_1 e_1 + x_4 e_2 + x_3 e_3 + x_2 e_4 \tag{14}$$

برخوردار است .ازاینرو ، B را می‌توان به عنوان تعویض کنندهٔ دو مختص ، به جای دو بردار پایه ، نیز تصور کرد .

در برهانی که خواهد آمد ، از تصاویر $P_0, \ldots, P_n$ در R^n که با $P_0 x = 0$ و ، به ازای $1 \leq m \leq n$ با

$$P_m \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_m \mathbf{e}_m \tag{15}$$

تعریف شده‌اند استفاده خواهیم کرد. بنابر این، P_m تصویری است که برد و فضای پوچش بترتیب به وسیلهٔ $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ و $\{\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ پیموده می‌شوند.

۱۰ ۰ ۷ قضیه. فرض کنیم $\mathbf{F}$ یک $\mathscr{C}'$-نگاشت از مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ بتوی R^n باشد، $0 \in E$، $\mathbf{F}(0) = 0$، و $\mathbf{F}'(0)$ معکوسپذیر باشد.

در این صورت، همسایگیی از 0 در R^n هست که در آن نمایش

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = B_1 \cdots B_{n-1} \mathbf{G}_n \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1(\mathbf{x}) \tag{16}$$

معتبر باشد.

در (۱۶)، هر $\mathbf{G}_i$ یک $\mathscr{C}'$-نگاشت اولیه در همسایگیی از 0 است، $\mathbf{G}_i(0) = 0$، $\mathbf{G}_i'(0)$ معکوسپذیر است، و هر B_i یا یک ضربه یا عملگر همانی می‌باشد.

مختصر بگوییم، رابطهٔ (۱۶) نگاشت $\mathbf{F}$ را موضعاً" به صورت ترکیبی از نگاشتهای اولیه و ضربه‌ها نمایش می‌دهد.

برهان. قرارمی‌دهیم $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1$. فرض می‌کنیم $1 \le m \le n-1$ و فرض استقرای زیر را (که بوضوح برای $m = 1$ برقرار است) طرح می‌کنیم:

V_m یک همسایگی 0 است، $\mathbf{F}_m \in \mathscr{C}'(V_m)$، $\mathbf{F}_m(0) = 0$، $\mathbf{F}_m'(0)$ معکوسپذیر است، و

$$P_{m-1}\mathbf{F}_m(\mathbf{x}) = P_{m-1}\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in V_m). \tag{17}$$

بنابر (۱۷) داریم

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{x}) = P_{m-1}\mathbf{x} + \sum_{i=m}^{n} \alpha_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \tag{18}$$

که در آن $\alpha_m, \ldots, \alpha_n$، $\mathscr{C}'$-توابعی حقیقی در V_m می‌باشند. بنابر این،

$$\mathbf{F}_m'(0)\mathbf{e}_m = \sum_{i=m}^{n} (D_m \alpha_i)(0)\mathbf{e}_i . \tag{19}$$

چون $\mathbf{F}_m'(0)$ معکوسپذیر است، سمت چپ (۱۹) صفر نیست؛ و لذا، k ای هست که $m \le k \le n$ و $(D_m \alpha_k)(0) \neq 0$.

فرض‌کنیم B_m ضربه‌ای باشد که m را با این k عوض می‌کند (B_m درصورت $k = m$ همانی است) ، و تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{G}_m(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + [\alpha_k(\mathbf{x}) - x_m]\mathbf{e}_m \qquad (\mathbf{x} \in V_m). \tag{20}$$

دراین صورت ، $\mathbf{G}_m \in \mathscr{C}'(V_m)$ ، $\mathbf{G}_m$ اولیه‌است ، و $\mathbf{G}_m'(\mathbf{0})$ ، چونکه $(D_m \alpha_k)(\mathbf{0}) \neq 0$ ، معکوسپذیر می‌باشد .

بنابر این ، قضیهٔ تابع معکوس نشان می‌دهد که مجموعهٔ بازی چون U_m ، با این خاصیت که $\mathbf{0} \in U_m \subset V_m$ وجوددارد بطوری‌که $\mathbf{G}_m$ یک نگاشت 1-1 از U_m بروی همسایگیی از $\mathbf{0}$ مانند V_{m+1} است که در آن $\mathbf{G}_m^{-1}$ به طور پیوسته مشتقپذیر می‌باشد . $\mathbf{F}_{m+1}$ را با

$$\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{y}) = B_m \mathbf{F}_m \circ \mathbf{G}_m^{-1}(\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{y} \in V_{m+1}) \tag{21}$$

تعریف می‌کنیم .

دراین‌صورت ، $\mathbf{F}_{m+1} \in \mathscr{C}'(V_{m+1})$ ، $\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ، و $\mathbf{F}_{m+1}'(\mathbf{0})$ (طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای) معکوسپذیر است . همچنین ، به ازای $\mathbf{x} \in U_m$

$$\begin{aligned} P_m \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{G}_m(\mathbf{x})) &= P_m B_m \mathbf{F}_m(\mathbf{x}) \\ &= P_m[P_{m-1}\mathbf{x} + \alpha_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_m + \cdots] \\ &= P_{m-1}\mathbf{x} + \alpha_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_m \\ &= P_m \mathbf{G}_m(\mathbf{x}) . \end{aligned} \tag{22}$$

درنتیجه ،

$$P_m \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{y}) = P_m \mathbf{y} \qquad (\mathbf{y} \in V_{m+1}) . \tag{23}$$

بنابر این ، فرض استقرای ما به ازای $m + 1$ به جای m برقرار است .

[در (۲۲) ابتدا از (۲۱) ، بعد از (۱۸) و تعریف B_m ، سپس از تعریف P_m ، و سرانجام از (۲۰) استفاده می‌کنیم .]

چون $B_m B_m = I$ ، رابطهٔ (۲۱) ، به ازای $\mathbf{y} = \mathbf{G}_m(\mathbf{x})$ ، با

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{x}) = B_m \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{G}_m(\mathbf{x})) \qquad (\mathbf{x} \in U_m) \tag{24}$$

معادل می‌باشد .

چنانچه‌این را به‌ازای $m = 1,\ldots,n-1$ به کار بریم ، در یکی از همسایگیهای $\mathbf{0}$ متوالیا " خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 &= B_1 \mathbf{F}_2 \circ \mathbf{G}_1 \\ &= B_1 B_2 \mathbf{F}_3 \circ \mathbf{G}_2 \circ \mathbf{G}_1 = \cdots \end{aligned}$$

$$= B_1 \cdots B_{n-1}\mathbf{F}_n \circ \mathbf{G}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1 .$$

بنابر (۱۷)، $\mathbf{F}_n$ اولیه است. این برهان را تمام خواهد کرد.

افرازهای واحد

۸۰۱۰ قضیه. *فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ R^n و $\{V_\alpha\}$ پوشش بازی از آن باشد. در این صورت، تابعهایی چون $\psi_1, \dots, \psi_s \in \mathscr{C}(R^n)$ هستند بطوری که*

(آ) به ازای $1 \le i \le s$، $0 \le \psi_i \le 1$؛

(ب) هر ψ_i تکیه‌گاه در V_α ی دارد؛

(پ) به ازای هر $\mathbf{x} \in K$، $\psi_1(\mathbf{x}) + \cdots + \psi_s(\mathbf{x}) = 1$.

بخاطر (پ)، $\{\psi_i\}$ را یک **افراز واحد** می‌نامند؛ و (ب) را گاهی این‌طور بیان می‌کنند که می‌گویند $\{\psi_i\}$ مطیع پوشش $\{V_\alpha\}$ است.

نتیجه. *هرگاه $f \in \mathscr{C}(R^n)$ و تکیه‌گاه f در K قرار داشته باشد، آنگاه*

$$f = \sum_{i=1}^{s} \psi_i f . \tag{25}$$

هر $\psi_i f$ تکیه‌گاهش در V_α ای خواهد بود.

اصل مطلب در (۲۵) این است که این رابطه نمایشی از f به صورت مجموعی از توابع پیوستهٔ $\psi_i f$ با تکیه‌گاههای "کوچک" را به دست می‌دهد.

برهان. به هر $\mathbf{x} \in K$ اندیس $\alpha(\mathbf{x})$ را مربوط می‌کنیم بطوری که $\mathbf{x} \in V_{\alpha(\mathbf{x})}$. در این صورت، گویهای بازی مانند $B(\mathbf{x})$ و $W(\mathbf{x})$، به مرکز $\mathbf{x}$، هستند با این خاصیت که

$$\overline{B(\mathbf{x})} \subset W(\mathbf{x}) \subset \overline{W(\mathbf{x})} \subset V_{\alpha(x)} . \tag{26}$$

چون K فشرده است، نقاطی مثل $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$ در K موجودند بطوری که

$$K \subset B(\mathbf{x}_1) \cup \cdots \cup B(\mathbf{x}_s) . \tag{27}$$

بنابر (۲۶)، توابعی چون $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in \mathscr{C}(R^n)$ وجوددارندبقسمی‌که $\varphi_i(\mathbf{x}) = 1$ بر $B(\mathbf{x}_i)$،

$\varphi_i(\mathbf{x})$ خارج $W(\mathbf{x}_i)$ صفر است، و $0 \le \varphi_i(\mathbf{x}) \le 1$ بر R^n. تعریف می‌کنیم $\psi_1 = \varphi_1$ و به ازای $i = 1, \ldots, s-1$

$$\psi_{i+1} = (1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_i)\varphi_{i+1}. \tag{28}$$

خواص (آ) و (ب) واضح هستند. رابطهٔ

$$\psi_1 + \cdots + \psi_i = 1 - (1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_i) \tag{29}$$

به ازای $i = 1$ بدیهی است. اگر (۲۹) به ازای i ی کمتر از s برقرار باشد، جمع (۲۸) و (۲۹) رابطهٔ (۲۹) را با $i+1$ به جای i به دست می‌دهد. از اینجا نتیجه خواهد شد که

$$\sum_{i=1}^{s} \psi_i(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^{s} [1-\varphi_i(\mathbf{x})] \qquad (\mathbf{x} \in R^n). \tag{30}$$

هرگاه $\mathbf{x} \in K$، آنگاه به‌ازای i ی $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_i)$. درنتیجه، $\varphi_i(\mathbf{x}) = 1$، و حاصل ضرب در (۳۰) صفر می‌باشد. این (پ) را ثابت خواهد کرد.

تغییر متغیرها

حال می‌توان به‌وصف اثر تغییر متغیرها بر انتگرال چندگانه پرداخت. بخاطر سادگی، خود را اینجا به توابع پیوسته با تکیه‌گاه فشرده مقید می‌کنیم، هر چند که این برای بسیاری از کاربردها خیلی محدود کننده است. این مطلب با تمرینهای ۹ تا ۱۳ توضیح خواهد شد.

۹.۱۰ قضیه. ***فرض‌کنیم T یک $\mathscr{C}'$نگاشت 1-1 از مجموعهٔ باز $E \subset R^k$ بتوی R^k باشد بطوری که به‌ازای هر $\mathbf{x} \in E$، $J_T(\mathbf{x}) \neq 0$. هرگاه f یک تابع پیوسته بر R^k باشد که تکیه‌گاهش فشرده و در $T(E)$ جای داشته باشد، آنگاه***

$$\int_{R^k} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_{R^k} f(T(\mathbf{x}))\,|J_T(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}. \tag{31}$$

به یاد می‌آوریم که J_T ژاکوبی T است. فرض $J_T(\mathbf{x}) \neq 0$، بر طبق قضیهٔ تابع معکوس، ایجاب می‌کند که T^{-1} بر $T(E)$ پیوسته است، و این تضمین خواهد کرد که انتگرالدهٔ سمت راست (۳۱) تکیه‌گاه فشرده‌ای در E دارد (قضیهٔ ۱۴.۴).

وجود **قدر مطلق** $J_T(\mathbf{x})$ در (۳۱) ممکن است توضیحی را طلب کند. حالت $k = 1$ را گرفته فرض می‌کنیم T یک $\mathscr{C}'$نگاشت 1-1 از R^1 بروی R^1 باشد. در این صورت،

$J_T(x) = T'(x)$ ؛ و اگر T **صعودی** باشد ، بنـابر قضایای ۱۹۰۶ و ۱۷۰۶ ، به ازای تمام توابع پیوستهٔ f با تکیه‌گاه فشرده خواهیم داشت

$$\int_{R^1} f(y)\, dy = \int_{R^1} f(T(x))T'(x)\, dx \,. \tag{32}$$

اما هرگاه T نزول کنـد ، آنگاه $T'(x) < 0$ ؛ و اگر f درون تکیه‌گاهش مثبت باشد ، سمت چپ (۳۲) مثبت و طرف راست آن منفی است . در صورت تعویض T' در (۳۲) با $|T'|$ معادلهٔ صحیحی به دست خواهد آمد .

نکته آن است کـه انتگرالهایی را که مـا فعلا" در نظر می‌گیریم انتگرالهای توابعی هستند روی زیرمجموعه‌هایی از R^k ، و ما امتداد و یا جهتی را به این زیرمجموعه‌ها مربوط نمی‌کنیم . وقتی به انتگرالگیری از فرمهای دیفرانسیل روی سطوح رسیدیم ، دیدگاه متفاوتی خواهیم پذیرفت .

برهان . از آنچه هـم اکنون گفته شد معلوم می‌شود که (۳۱) درست است هرگاه T یک $\mathscr{C}'$-نگاشت اولیه باشد (ر.ک. تعریف ۵۰۱۰) ، و قضیهٔ ۲۰۱۰ نشان می‌دهد که (۳۱) درست است هرگاه T تبدیلی خطی باشد که فقط دو مختص را تغییر می‌دهد .

هرگاه قضیه برای تبدیلات P و Q درست باشد و $S(\mathbf{x}) = P(Q(\mathbf{x}))$ ،

$$\begin{aligned}\int f(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} &= \int f(P(\mathbf{y}))|J_P(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \\ &= \int f(P(Q(\mathbf{x})))\,|J_P(Q(\mathbf{x}))|\,|J_Q(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \\ &= \int f(S(\mathbf{x}))|J_S(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x},\end{aligned}$$

زیرا ، بنابر قضیهٔ ضرب دترمینانها و قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$\begin{aligned}J_P(Q(\mathbf{x}))J_Q(\mathbf{x}) &= \det P'(Q(\mathbf{x}))\, \det Q'(\mathbf{x}) \\ &= \det P'(Q(\mathbf{x}))Q'(\mathbf{x}) = \det S'(\mathbf{x}) = J_S(\mathbf{x}) \,.\end{aligned}$$

پس قضیه برای S نیز درست می‌باشد .

هر نقطهٔ $\mathbf{a} \in E$ همسایگیی چون $U \subset E$ دارد که در آن

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{a}) + B_1 \cdots B_{k-1}\mathbf{G}_k \circ \mathbf{G}_{k-1} \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \tag{33}$$

که $\mathbf{G}_i$ و B_i به صورت بوده در قضیهٔ ۷۰۱۰ هستند . با قرار $V = T(U)$ نتیجه خواهد شد که (۳۱) برقرار است هرگاه تکیه‌گاه f در V جای داشته باشد . بنابراین :

هرنقطهٔ $y \in T(E)$ در مجموعهٔ بازی چون $V_y \subset T(E)$ واقع است بطوری که (۳۱) به ازای تمام توابع پیوسته‌ای که تکیه‌گاهش در V_y جا دارند برقرار می‌باشد.

حال فرض‌کنیم f تابع پیوسته‌ای با تکیه‌گاه فشردهٔ $K \subset T(E)$ باشد. چون $\{V_y\}$ K را می‌پوشاند، نتیجهٔ قضیهٔ ۸۰۱۰ نشان می‌دهد که $f = \Sigma\psi_i f$، که در آن هر ψ_i پیوسته است و هر ψ_i تکیه‌گاه در V_y ی دارد. پس (۳۱) به ازای هر $\psi_i f$ برقرار است؛ و درنتیجه، برای مجموعشان f نیز چنین خواهد بود.

فرمهای دیفرانسیل

حال بخشی از ابزارهای لازم برای شکل n بعدی قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را که معمولاً "**قضیهٔ استوکس** نام دارد عرضه می‌کنیم. شکل آغازی قضیهٔ استوکس در کاربردهای آنالیز برداری در الکترو مغناطیس ظاهر گشت، و برحسب تاو میدان برداری بیان شده‌بود. قضیهٔ گرین[1] و قضیهٔ دیورژانس حالات خاص دیگری از آن می‌باشند. این مطالب در پایان فصل به اختصار مطرح می‌شوند.

کیفیت بارز قضیهٔ استوکس این است که تنها مطلب پیچیده در باب آن ساخت ماهرانهٔ تعریفهایی است که برای بیان صورت آن لازمند. این تعریفها به فرمهای دیفرانسیل، مشتقاتشان، کرانه‌ها، و جهت مربوط می‌شوند. به محض فهمیده شدن این مفاهیم، صورت قضیه بسیار مختصر و موجز است و اثباتش مشکل زیادی به بار نخواهد آورد.

تا بحال مشتقات توابع چند متغیره را فقط برای توابعی در نظر گرفته‌ایم که در مجموعه‌های **باز** تعریف شده‌اند. این عمل برای احتراز از مشکلاتی بود که ممکن است در نقاط کرانه‌ای پیش آیند. اما فعلاً" مقتضی است که توابع مشتقپذیر بر مجموعه‌های **فشرده** مطرح شوند. لذا، قرار داد زیر را می‌پذیریم:

وقتی می‌گوییم f یک $\mathscr{C}'$نگاشت (یا یک $\mathscr{C}''$نگاشت) از مجموعهٔ فشردهٔ $D \subset R^k$ بتوی R^n است یعنی که یک $\mathscr{C}'$نگاشت (یا یک $\mathscr{C}''$نگاشت) g از مجموعهٔ بازی چون $W \subset R^k$ بتوی R^n هست بطوری که $D \subset W$ و، به ازای هر $x \in D$، $g(x) = f(x)$.

۱۰۰۱۰ تعریف. فرض کنیم E یک مجموعهٔ باز در R^n باشد. هر **سطح k بعدی** در E یک $\mathscr{C}'$نگاشت Φ از مجموعه‌ای فشرده مانند $D \subset R^k$ بتوی E است.

---
1. Green

D **قلمرو پارامتری** Φ نام یافته‌است . نقاط D با $(u_1, \ldots, u_k)$ = $\mathbf{u}$ نشان داده خواهند شد .

ما خود را به حالت ساده‌ای که در آن D یک حجرهٔ k بعدی و یا سادک k بعدی Q^k وصف شده در مثال ۴۰۱۰ است محدود می‌کنیم . دلیلش این است که ما به‌اجبار روی D انتگرال خواهیم گرفت ، و هنوز انتگرالگیری روی زیرمجموعه‌های پیچیده تر R^k را مطرح نکرده‌ایم . خواهید دید که این قید بر D (که از حالا به بعد تلویحا " پذیرفته می‌شود) به کلیت نظریهٔ فرمهای دیفرانسیل حاصل لطمهٔ زیادی نخواهد زد .

تأکید می‌کنیم که سطوح k بعدی در E **نگاشتهایی** بتوی E تعریف شده‌اند نه زیرمجموعه‌هایی‌از E . این‌مطلب با تعریف قبلی ما از منحنیها (تعریف ۲۶۰۶) مطابقت دارد . درواقع ، سطوح1بعدی دقیقا " همان منحنیهای به طور پیوسته مشتقپذیر می‌باشند .

۱۱۰۱۰ تعریف . فرض کنیم E مجموعهٔ بازی در R^n باشد . یک **فرم دیفرانسیل از مرتبهٔ** $k \geq 1$ **در** E (مختصرا " ، یک فرم k **بعدی در** E) تابعی‌است چون ω ،که به طور علامتی با مجموع

$$\omega = \sum a_{i_1} \ldots {}_{i_k}(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \tag{34}$$

نموده می‌شود (اندیسهای $i_1, \ldots, i_k$ مستقلا " از 1 تا n تغییر می‌کنند) ، بطوری که به هر سطح k بعدی Φ در E عدد $\omega(\Phi) = \int_\Phi \omega$ را طبق قاعدهٔ

$$\int_\Phi \omega = \int_D \sum a_{i_1} \cdots {}_{i_k}(\Phi(\mathbf{u}))\frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)}\, d\mathbf{u}, \tag{35}$$

که در آن D قلمرو پارامتری Φ است ، مربوط می‌کند .

توابع $a_{i_1} \cdots {}_{i_k}$ تابعهایی حقیقی و پیوسته در E فرض می‌شوند . چنانچه $\phi_1, \ldots, \phi_n$ مؤلفه‌های Φ باشند ، ژاکوبی آمده در (۳۵) ژاکوبیی است که با نگاشت

$$(u_1, \ldots, u_k) \to (\phi_{i_1}(\mathbf{u}), \ldots, \phi_{i_k}(\mathbf{u}))$$

مشخص خواهد شد .

توجه کنید که سمت راست (۳۵) انتگرالی روی D ، بصورتی که در تعریف ۱۰۱۰ (یا مثال ۴۰۱۰) معرفی شده ، است و (۳۵) **تعریف** علامت $\int_\Phi \omega$ می‌باشد .

فرم k بعدی ω را از ردهٔ $\mathscr{C}'$ یا $\mathscr{C}''$ نامند هرگاه توابع $a_{i_1} \cdots {}_{i_k}$ در (۳۴) همه از ردهٔ $\mathscr{C}'$ یا $\mathscr{C}''$ باشند .

یک فرم 0 بعدی در E ،بنا به تعریف ، یک تابع پیوسته در E گرفته می‌شود .

۱۲۰۱۰ چند مثال

(آ) فرض کنیم γ یک سطح 1 بعدی (منحنیی از ردهٔ $\mathscr{C}'$) در R^3 با قلمرو پارامتری $[0, 1]$ باشد .

به جای (x_1, x_2, x_3) می‌نویسیم (x, y, z) ، و قرار می‌دهیم

$$\omega = x\,dy + y\,dx.$$

در این صورت ،

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 [\gamma_1(t)\gamma_2'(t) + \gamma_2(t)\gamma_1'(t)]\,dt = \gamma_1(1)\gamma_2(1) - \gamma_1(0)\gamma_2(0).$$

توجه کنید که در این مثال $\int_\gamma \omega$ فقط به نقطهٔ ابتدایی $\gamma(0)$ و نقطهٔ انتهایی $\gamma(1)$ منحنی γ، بستگی دارد . بخصوص ، $\int_\gamma \omega$ به ازای هر منحنی بستهٔ γ صفر است . (همانطورکه بعداً خواهیم دید ، این مطلب برای هر فرم 1 بعدی ω که **کامل** باشد درست است .)

انتگرالهای فرمهای 1 بعدی را اغلب ***انتگرالهای خط*** می‌خوانند .

(ب) $a > 0, b > 0$ را ثابت گرفته تعریف می‌کنیم

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \qquad (0 \le t \le 2\pi);$$

درنتیجه، γ یک منحنی بسته در R^2 است . (برد ش یک بیضی می‌باشد .) در این صورت ،

$$\int_\gamma x\,dy = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t\,dt = \pi ab,$$

حال آنکه

$$\int_\gamma y\,dx = -\int_0^{2\pi} ab\sin^2 t\,dt = -\pi ab.$$

توجه دارید که $\int_\gamma x\,dy$ مساحت ناحیهٔ محدود به γ است . این حالت خاصی از قضیهٔ گرین می‌باشد .

(پ) فرض کنیم D حجره‌ای 3 بعدی باشد که با

$$0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

تعریف شده است. تعریف می‌کنیم $\Phi(r, \theta, \varphi) = (x, y, z)$ که در آن

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$
$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$
$$z = r \cos \theta.$$

در این صورت،

$$J_\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta.$$

لذا،

$$\int_\Phi dx \wedge dy \wedge dz = \int_D J_\Phi = \frac{4\pi}{3}. \tag{36}$$

توجه‌کنید که Φ، D را بروی گوی یکهٔ بسته از R^3 می‌نگارد، این نگاشت درون D یک به یک است (ولی بعضی نقاط کرانه‌ای به وسیلهٔ Φ بر هم منطبق می‌شوند)، و انتگرال (۳۶) مساوی حجم $\Phi(D)$ می‌باشد.

۱۳۰۱۰ خواص مقدماتی. فرض کنیم $\omega, \omega_1, \omega_2$ فرمهایی k بعدی‌در E باشند. می‌نویسیم $\omega_1 = \omega_2$ اگر و فقط اگر به ازای هر سطح kبعدی Φ در E، $\omega_1(\Phi) = \omega_2(\Phi)$. بخصوص، $\omega = 0$ یعنی به ازای هر سطح k بعدی Φ در E، $\omega(\Phi) = 0$. هرگاه c عددی حقیقی باشد، آنگاه $c\omega$ یک فرم k بعدی است که با

$$\int_\Phi c\omega = c \int_\Phi \omega \tag{37}$$

تعریف می‌شود؛ $\omega = \omega_1 + \omega_2$ یعنی به ازای هر سطح k بعدی Φ در E

$$\int_\Phi \omega = \int_\Phi \omega_1 + \int_\Phi \omega_2. \tag{38}$$

به عنوان حالتی خاص از (۳۷)، ملاحظه می‌کنیم که ω–طوری تعریف شده است که

$$\int_\Phi (-\omega) = -\int_\Phi d\omega. \tag{39}$$

فرم k بعدی

$$\omega = a(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \tag{40}$$

را در نظر گرفته، فرض‌می‌کنیم $\bar{\omega}$ فرم k بعدیی باشد که از تعویض جفتی زیرنویس در (۴۰) با هم به دست می‌آید. هرگاه (۳۵) و (۳۹) را با این مطلب که یک دترمینان در صورت

تعویض دو سطرش با هم تغییر علامت می‌دهد تلفیق کنیم ، خواهیم دید که

$$\bar{\omega} = -\omega. \tag{41}$$

به عنوان حالتی خاص از این ، توجه کنید که **رابطهٔ پادتعویضپذیری**

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \tag{42}$$

به ازای هر i و j برقرار است . بخصوص،

$$dx_i \wedge dx_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{43}$$

کلیتر می‌گوییم ، به رابطهٔ (۴۰) باز می‌گردیم و فرض می‌کنیم به ازای $r \neq s$ ، $i_r = i_s$. هرگاه این دو زیرنویس با هم عوض شوند، $\bar{\omega} = \omega$. درنتیجه، مطابق (۴۱) ، $\omega = 0$.

به عبارت دیگر ، *هرگاه ω با (۴۰) داده شده باشد ، آنگاه $\omega = 0$ مگر آنکه زیرنویسهای $i_1, \ldots, i_k$ همه متمایز باشند* .

لذا ، اگر ω مثل ω ی (۳۴) باشد، مجموعه‌های با زیرنویسهای مکرر را می‌توان بدون تغییر ω حذف کرد .

از اینجا نتیجه می‌شود که اگر $n < k$ ، 0 تنها فرم k بعدی در هر زیرمجموعهٔ باز R^n است .

پادتعویضپذیری که با (۴۲) بیان شده مؤید توجه بیش از حدی است که باید حین مطالعهٔ فرمهای دیفرانسیل به علامات منفی نمود .

۱۴۰۱۰ فرمهای k بعدی اساسی . هرگاه $i_1, \ldots, i_k$ اعداد صحیحی باشند بطوری که $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ و I kتایی مرتب $\{i_1, \ldots, i_k\}$ باشد ،آنگاه I را یک ***اندیس k بعدی صعودی*** می‌نامیم و نماد مختصر

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \tag{44}$$

را به کار می‌بریم . فرمهای dx_I ***فرمهای k بعدی اساسی در R^n*** خوانده خواهند شد .

تحقیق اینکه درست $n!/k!(n-k)!$ فرم k بعدی اساسی در R^n وجود دارد مشکل نیست . بهرحال ، ما از این موضوع هیچ استفاده‌ای نخواهیم کرد .

مطلب خیلی مهمتر این است که هرفرم k بعدی را می‌توان برحسب فرمهای k بعدی اساسی نمایش داد . برای اثبات آن ملاحظه می‌کنیم که هر k تایی $\{j_1, \ldots, j_k\}$ از اعداد صحیح متمایز را می‌توان با تعویض چندجفت از اینها با هم به یک اندیس k بعدی صعودی

J بدل کرد؛ که، همانطورکه‌دربخش ۱۳۰۱۰ دیدیم، هریک از این تعویضها به یک ضرب در $1-$ منجر می‌شود. لذا،

$$dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} = \varepsilon(j_1, \ldots, j_k)\, dx_J \tag{45}$$

که در آن $\varepsilon(j_1, \ldots, j_k)$، بسته به عدهٔ تعویضهای لازم، 1 یا $1-$ می‌باشد. درواقع، به آسانی می‌بینیم که

$$\varepsilon(j_1, \ldots, j_k) = s(j_1, \ldots, j_k) \tag{46}$$

که در آن s همان s تعریف ۳۳۰۹ می‌باشد.

به عنوان مثال،

$$dx_1 \wedge dx_5 \wedge dx_3 \wedge dx_2 = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5,$$
$$dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

چنانچه هر k تایی در (۳۴) به یک اندیس k بعدی صعودی بدل می‌شود، **نمایش متعارف** ω را به دست خواهیم آورد:

$$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{x})\, dx_I. \tag{47}$$

در (۴۷) جمعبندی روی تمام اندیسهای k بعدی صعودی I گرفته می‌شود. [البته، هر اندیس k بعدی صعودی از بسیاری (دقیقاً " از $k!$) k تایی ناشی می‌شود. لذا، هر b_I در (۴۷) ممکن است مجموع چند ضریب ذکر شده در (۳۴) باشد.]

به عنوان مثال،

$$x_1\, dx_2 \wedge dx_1 - x_2\, dx_3 \wedge dx_2 + x_3\, dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_2$$

یک فرم 2 بعدی در R^3 است که نمایش متعارف آن

$$(1 - x_1)\, dx_1 \wedge dx_2 + (x_2 + x_3)\, dx_2 \wedge dx_3$$

می‌باشد.

قضیهٔ یکتایی زیر یکی از دلایل اصلی معرفی نمایش متعارف یک فرم k بعدی می‌باشد.

۱۵۰۱۰ قضیه. فرض کنیم

$$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{x})\, dx_I \tag{48}$$

نمایش متعارف فرم k بعدی ω در مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ باشد. هرگاه $\omega = 0$ در E، آنگاه به ازای هر اندیس k بعدی I و هر $\mathbf{x} \in E$، $b_I(\mathbf{x}) = 0$.

توجه کنیدکه‌برای مجموعهای‌نظیر (۳۴) حکم مشابه صحیح نیست، چرا که، مثلاً"،

$$dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_1 = 0 \cdot$$

برهان. برای‌رسیدن به‌تناقض فرض می‌کنیم به ازای $\mathbf{v} \in E$ ای و اندیس k بعدی صعودی مانند $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ ، $b_J(\mathbf{v}) > 0$. چون b_J پیوسته است، $h > 0$ ی وجود دارد بطوری که به ازای تمام $\mathbf{x} \in R^n$ هایی که مختصاتشان در $|x_i - v_i| \le h$ صدق می‌کنند $b_J(\mathbf{x}) > 0$. فرض کنید D چنان حجرهٔ k بعدیی در R^k باشد که $\mathbf{u} \in D$ اگر و فقط اگر به ازای $r = 1, \ldots, k$ ، $|u_r| \le h$. تعریف می‌کنیم

$$\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{v} + \sum_{r=1}^{k} u_r \mathbf{e}_{j_r} \qquad (\mathbf{u} \in D) \cdot \tag{49}$$

در این صورت، Φ، یک سطح k بعدی در E است، با قلمرو پارامتری D، و به ازای هر $\mathbf{u} \in D$ ، $b_J(\Phi(\mathbf{u})) > 0$.

حکم می‌کنیم که

$$\int_{\Phi} \omega = \int_D b_J(\Phi(\mathbf{u}))\, d\mathbf{u} \cdot \tag{50}$$

چون طرف راست (۵۰) مثبت است، نتیجه می‌شود که $\omega(\Phi) \neq 0$. لذا، (۵۰) تناقض ما را خواهد داد.

برای اثبات (۵۰)، قاعدهٔ (۳۵) را در مورد نمایش (۴۸) به کار می‌گیریم. صریحتر بگوییم، ژاکوبیهایی را که در (۳۵) ظاهر شده‌اند حساب می‌کنیم. بنابر (۴۹)،

$$\frac{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)} = 1 \cdot$$

به ازای‌هر اندیس k بعدی‌و صعودی‌دیگر $I \neq J$ ژاکوبی صفر است، زیرا مساوی دترمینان ماتریسی است که دست کم یک سطر صفر دارد.

۱۰.۱۶ حاصل ضربهای فرمهای k بعدی اساسی. فرض کنیم

$$I = \{i_1, \ldots, i_p\}, \qquad J = \{j_1, \ldots, j_q\} \tag{51}$$

که در آنها $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ و $1 \le j_1 < \cdots < j_q \le n$. **حاصل‌ضرب** فرمهای اساسی نظیر dx_I و dx_J در R^n یک فرم $(p+q)$ بعدی در R^n است که با علامت $dx_I \wedge dx_J$ نموده و توسط

$$dx_I \wedge dx_J = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \tag{52}$$

تعریف می‌شود .

هرگاه I و J عنصر مشترک داشته باشند ، بحث بخش ۱۰ ۰ ۱۲ نشان خواهد داد که $dx_I \wedge dx_J = 0$.

اگر I و J عنصر مشترک نداشته باشند ، به جای اندیس $(p+q)$ بعدی صعودیی که با آراستن اعضای $J \cup I$ به‌ترتیب‌صعودی حاصل می‌شود می‌نویسیم $[I, J]$. در این صورت ، $dx_{[I, J]}$ یک فرم $(p+q)$ بعدی اساسی است . حکم می‌کنیم

$$dx_I \wedge dx_J = (-1)^\alpha \, dx_{[I, J]} \tag{53}$$

که‌درآن α تعداد تفاضلهای $j_t - i_s$ ی است که منفی هستند . (لذا ، تعداد تفاضلهای مثبت $pq - \alpha$ می‌باشد .)

برای اثبات (۵۳) ، اعمال زیر را بر اعداد

$$i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q \tag{54}$$

انجام می‌دهیم . i_p را قدم به قدم به راست می‌بریم تا جایی که همسایهٔ چپش از i_p کمتر باشد . تعداد گامها برابر عدهٔ زیرنویسهایی چون t است که $i_p < j_t$. (توجه کنید که 0 گامها حالات جداگانه‌ای هستند .) بعد همین کار را برای $i_{p-1}, \ldots, i_1$ انجام می‌دهیم . تعداد کل گامهای برداشته شده α است . آرایش نهایی حاصل $[I, J]$ خواهد بود . هر قدم ، وقتی سمت راست (۵۲) برداشته شود ، موجب ضرب $dx_I \wedge dx_J$ در -1 می‌شود . بنابراین ، (۵۳) برقرار می‌باشد .

توجه دارید که سمت راست (۵۳) نمایش متعارف $dx_I \wedge dx_J$ است .

اینک‌فرض می‌کنیم $K = (k_1, \ldots, k_r)$ یک‌اندیس r بعدی صعودی در $\{1, \ldots, n\}$ باشد . با استفاده از (۵۳) ثابت می‌کنیم

$$(dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K) \text{.} \tag{55}$$

هرگاه دو مجموعه از مجموعه‌های I ، J ، و K عنصر مشترک داشته باشند ، هرطرف (۵۵) صفر است . درنتیجه ، دو طرف مساوی خواهند بود .

پس فرض می‌کنیم I ، J ، و K دو بدو ازهم‌جدا باشند . $[I, J, K]$ را اندیس $(p+q+r)$ بعدیی می‌انگاریم که از اجتماع آنها حاصل می‌شود . β را با جفت مرتب (J, K) و γ را با جفت مرتب (I, K) به همان نحو که α در (۵۳) با (I, J) مربوط شده بود ربط می‌دهیم . در این صورت ، با دو بار به کار رفتن (۵۳) ، طرف چپ (۵۵)

می‌شود

$$(-1)^{\alpha}\, dx_{[I,J]} \wedge dx_K = (-1)^{\alpha}(-1)^{\beta+\gamma}\, dx_{[I,J,K]},$$

و طرف راست (۵۵) خواهد شد

$$(-1)^{\beta}\, dx_I \wedge dx_{[J,K]} = (-1)^{\beta}(-1)^{\alpha+\gamma}\, dx_{[I,J,K]}.$$

پس (۵۵) درست خواهد بود .

۱۷۰۱۰ ضرب . فرض کنیم ω و λ ، در مجموعهٔ بازی چون $E \subset R^n$ ، بترتیب فرمهایی p و q بعدی با نمایشهای متعارف

$$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{x})\, dx_I, \qquad \lambda = \sum_J c_J(\mathbf{x})\, dx_J \tag{56}$$

باشند ، که در آنها I روی تمام اندیسهای p بعدی و J روی همهٔ اندیسهای q بعدی مأخوذ از مجموعهٔ $\{1, \ldots, n\}$ تغییر می‌کنند .

حاصل ضربشان ، که با علامت $\omega \wedge \lambda$ نموده می‌شود ، مساوی

$$\omega \wedge \lambda = \sum_{I,J} b_I(\mathbf{x}) c_J(\mathbf{x})\, dx_I \wedge dx_J \tag{57}$$

تعریف می‌گردد . در این مجموع I و J مستقلا" روی مقادیر ممکن خود تغییر می‌کنند، و $dx_I \wedge dx_J$ به همان صورت بوده در بخش ۱۶۰۱۰ می‌باشد . لذا، $\omega \wedge \lambda$ یک‌فرم $(p+q)$ بعدی در E خواهد بود .

به‌آسانی دیده می‌شود (جزئیات را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم) که قوانین پخشپذیری

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \lambda = (\omega_1 \wedge \lambda) + (\omega_2 \wedge \lambda)$$

و

$$\omega \wedge (\lambda_1 + \lambda_2) = (\omega \wedge \lambda_1) + (\omega \wedge \lambda_2),$$

نسبت به‌جمعی که در بخش ۱۳۰۱۰ تعریف شد ، برقرار است . اگر این قوانین پخشپذیری با (۵۵) تلفیق شوند ، قانون شرکتپذیری

$$(\omega \wedge \lambda) \wedge \sigma = \omega \wedge (\lambda \wedge \sigma) \tag{58}$$

را برای فرمهای دلخواه ω، λ، σ در E خواهیم داشت .

در این بحث تلویحا" فرض شده بود که $p \geq 1$ و $q \geq 1$. حاصل ضرب فرم 0 بعدی f با فرم p بعدی ω داده شده با (۵۶) عملا" مساوی فرم p بعدی

$$f\omega = \omega f = \sum_I f(\mathbf{x}) b_I(\mathbf{x})\, dx_I$$

تعریف می‌شود . رسم این‌است‌که وقتی f یک فرم 0 بعدی است ، به جای $f \wedge \omega$ می‌نویسند $f\omega$.

۱۸۰۱۰ مشتقگیری . حال عملگر مشتقگیری d راکه به هرفرم k بعدی ω ازردهٔ $\mathscr{C}'$ درمجموعهٔ باز $E \subset R^n$ فرم $(k+1)$ بعدی $d\omega$ را مربوط می‌کند تعریف می‌کنیم .

یک‌فرم 0 بعدی ازردهٔ $\mathscr{C}'$ در E چیزی جز یک تابع حقیقی چون $f \in \mathscr{C}'(E)$ نیست ، و ما تعریف می‌کنیم

$$df = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\mathbf{x})\, dx_i . \tag{59}$$

هرگاه $\omega = \Sigma b_I(\mathbf{x})\, dx_I$ نمایش متعارف‌فرم k بعدی ω باشدو ، به ازای هر اندیس k بعدی و صعودی I ، $b_I \in \mathscr{C}'(E)$ ، آنگاه تعریف می‌کنیم

$$d\omega = \sum_{I} (db_I) \wedge dx_I . \tag{60}$$

۱۹۰۱۰ مثال . فرض‌کنیم E در R^n باز ، $f \in \mathscr{C}'(E)$ ،و γ یک منحنی به‌طورپیوسته مشتقپذیردر E با قلمرو $[0, 1]$ باشد . بنابر (۵۹) و (۳۵) ،

$$\int_{\gamma} df = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\gamma(t))\gamma_i'(t)\, dt. \tag{61}$$

بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای ، آخرین انتگرالده مساوی $(f \circ \gamma)'(t)$ است . لذا ،

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)), \tag{62}$$

و خواهیم دید که ، مثل قسمت (آ) مثال ۱۲۰۱۰ ، $\int_\gamma df$ به ازای تمام γ های با نقطهٔ ابتدایی و نقطهٔ انتهایی مشترک یکی است .

بنابراین ،قیاس با مثال ۱۲۰۱۰ (ب) نشان می‌دهد که فرم یک بعدی $x\, dy$ مشتق هیچ فرم صفر بعدی f نیست . این را می‌شد از قسمت (ب) قضیهٔ زیر نیز نتیجه گرفت ، زیرا

$$d(x\, dy) = dx \wedge dy \neq 0 .$$

۲۰۰۱۰ قضیه

(آ) هرگاه ω و λ بترتیب فرمهایی k بعدی و m بعدی‌و از ردهٔ $\mathscr{C}'$ در E باشند ، آنگاه

$$d(\omega \wedge \lambda) = (d\omega) \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda. \tag{63}$$

(ب) هرگاه ω از ردهٔ $\mathscr{C}''$ در E باشد، آنگاه $d^2\omega = 0$.

البته، در اینجا $d^2\omega$ یعنی $d(d\omega)$.

برهان. بخاطر (۵۷) و (۶۰)، قسمت (آ) در صورتی نتیجه می‌شود که (۶۳) برای حالت خاص

$$\omega = f\,dx_I, \qquad \lambda = g\,dx_J \tag{64}$$

که‌درآن $f, g \in \mathscr{C}'(E)$، dx_I یک‌فرم k بعدی‌اساسی، و dx_J یک فرم m بعدی اساسی است، ثابت شود. [چنانچه k یا m یا هر دو 0 باشند، فقط dx_I یا dx_J را در (۶۴) حذف می‌کنیم؛ این عمل بر برهانی که می‌آید بی‌تأثیر است.] در این صورت،

$$\omega \wedge \lambda = fg\,dx_I \wedge dx_J.$$

فرض‌کنیم I و J عنصر مشترک نداشته باشند. [در حالت دیگر هر یک از سه جملهٔ (۶۳) مساوی 0 است.] پس، اگر از (۵۳) استفاده کنیم،

$$d(\omega \wedge \lambda) = d(fg\,dx_I \wedge dx_J) = (-1)^\alpha\, d(fg\,dx_{[I,J]}).$$

بنابر (۵۹)، $d(fg) = f\,dg + g\,df$. لذا، (۶۰) نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \lambda) &= (-1)^\alpha (f\,dg + g\,df) \wedge dx_{[I,J]} \\ &= (g\,df + f\,dg) \wedge dx_I \wedge dx_J. \end{aligned}$$

چون dg یک فرم یک بعدی و dx_I یک فرم k بعدی است، بنابر (۴۲) خواهیم داشت

$$dg \wedge dx_I = (-1)^k\, dx_I \wedge dg.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \lambda) &= (df \wedge dx_I) \wedge (g\,dx_J) + (-1)^k (f\,dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J) \\ &= (d\omega) \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda, \end{aligned}$$

که (آ) را ثابت خواهد کرد.

توجه دارید که قانون شرکتپذیری (۵۸) آزادانه به کار رفته است.

حال (ب) را ابتدا برای یک فرم صفر بعدی $f \in \mathscr{C}''$ ثابت می‌کنیم:

$$\begin{aligned} d^2 f &= d\left(\sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\mathbf{x})\, dx_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} d(D_j f) \wedge dx_j \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,\, j=1}^{n} (D_{ij}f)(\mathbf{x})\, dx_i \wedge dx_j .$$

چون $D_{ij}f = D_{ji}f$ (قضیهٔ ۹・۴۱) و $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ ، می‌بینیم که $d^2f = 0$.

هرگاه، همانند در (۶۴) ، $\omega = f\, dx_I$ ، آنگاه $d\omega = (df) \wedge dx_I$. بنابر (۶۰) ، $d(dx_I) = 0$. پس (۶۳) نشان خواهد داد که

$$d^2\omega = (d^2f) \wedge dx_I = 0.$$

۱۰・۲۱ تغییر متغیرها . فرض‌کنیم E مجموعهٔ بازی‌در R^n ، T نگاشتی‌از E بتوی مجموعهٔ باز $V \subset R^m$ ، $\mathscr{C}'$ ، و ω یک فرم k بعدی در V باشد که نمایش متعارفش

$$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{y})\, dy_I \tag{65}$$

است . (ما $\mathbf{y}$ را برای نقاط V و $\mathbf{x}$ را برای نقاط E به کار می‌بریم .)

فرض کنیم $t_1, \ldots, t_m$ مؤلفه‌های T باشند : هرگاه

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) = T(\mathbf{x}),$$

آنگاه $y_i = t_i(\mathbf{x})$. همانند در (۵۹) ،

$$dt_i = \sum_{j=1}^{n} (D_j t_i)(\mathbf{x})\, dx_j \qquad (1 \le i \le m). \tag{66}$$

پس هر dt_i یک فرم یک بعدی در E می‌باشد .

نگاشت T ، ω را به یک فرم k بعدی ω_T در E که تعریفش

$$\omega_T = \sum_I b_I(T(\mathbf{x}))\, dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_k} \tag{67}$$

است تبدیل می‌کند . در هر مجموعهٔ (۶۷) ، $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ یک اندیس k بعدی صعودی خواهد بود .

قضیهٔ بعدی ما نشان می‌دهد که جمع ، ضرب ، و مشتقگیری از فرمها طوری تعریف شده‌اند که با تغییر متغیرها تعویض می‌شوند .

۱۰・۲۲ قضیه. با E و T به صورت بوده دربخش ۱۰・۲۱ ، فرض می‌کنیم ω و λ بترتیب فرمهایی k بعدی و m بعدی در V باشند . در این صورت ،

(آ) اگر $k=m$، $(\omega+\lambda)_T=\omega_T+\lambda_T$؛

(ب) $(\omega\wedge\lambda)_T=\omega_T\wedge\lambda_T$؛

(پ) $d(\omega_T)=(d\omega)_T$ هرگاه ω از ردهٔ $\mathscr{C}'$ و T از ردهٔ $\mathscr{C}''$ باشد.

برهان. قسمت (آ) فوراً از تعریفها نتیجه می‌شود. قسمت (ب) به محض تشخیص اینکه قطع نظر از صعودی بودن یا نبودن $\{i_1,\ldots,i_r\}$

$$(dy_{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_{i_r})_T=dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge dt_{i_r} \tag{68}$$

تقریباً واضح خواهد بود. رابطهٔ (۶۸) برقرار است، زیرا تعداد علامات منهای لازم در هرطرف (۶۸) برای ایجاد تجدید آرایشهای صعودی یکی است.

به اثبات قسمت (پ) می‌پردازیم. گوییم هرگاه f یک فرم صفر بعدی از ردهٔ $\mathscr{C}'$ در V باشد، آنگاه

$$f_T(\mathbf{x})=f(T(\mathbf{x})),\qquad df=\sum_i(D_if)(\mathbf{y})\,dy_i\,.$$

بنا به قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} d(f_T)&=\sum_j(D_jf_T)(\mathbf{x})\,dx_j\\ &=\sum_j\sum_i(D_if)(T(\mathbf{x}))(D_jt_i)(\mathbf{x})\,dx_j\\ &=\sum_i(D_if)(T(\mathbf{x}))\,dt_i\\ &=(df)_T\,. \end{aligned} \tag{69}$$

هرگاه $dy_I=dy_{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_{i_k}$، آنگاه $(dy_I)_T=dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge dt_{i_k}$، و قضیهٔ ۲۰۰۱۰ نشان می‌دهد که

$$d((dy_I)_T)=0\cdot \tag{70}$$

(این جایی است که فرض $T\in\mathscr{C}''$ به کار رفته است.)

حال فرض می‌کنیم $\omega=f\,dy_I$. در این صورت،

$$\omega_T=f_T(\mathbf{x})\,(dy_I)_T\,,$$

و محاسبات قبلی به

$$\begin{aligned} d(\omega_T)&=d(f_T)\wedge(dy_I)_T=(df)_T\wedge(dy_I)_T\\ &=((df)\wedge dy_I)_T=(d\omega)_T \end{aligned}$$

منجر می‌شوند . تساوی اول بنا به (۶۳) و (۷۰) ، تساوی دوم بنا به (۶۹) ، تساوی سوم بنابر قسمت (ب) ، و تساوی آخر بنا به تعریف $d\omega$ برقرار است .

حالت کلی (پ) ، در صورتی که (آ) را به کار بریم ، از حالت خاصی که هم‌اکنون ثابت شد نتیجه می‌شود . این برهان را تمام خواهد کرد .

هدف بعدی ما قضیهٔ ۲۵۰۱۰ است . این قضیه مستقیماً "از دو خاصیت تبدیلی مهم دیگر فرمهای دیفرانسیل ، که ما آنها را اول بیان می‌کنیم ، نتیجه خواهد شد .

۲۳۰۱۰ قضیه . فرض کنیم T یک $\mathscr{C}'$-نگاشت از مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ بتوی مجموعهٔ باز $V \subset R^m$، S یک $\mathscr{C}'$- نگاشت از V بتوی مجموعهٔ باز $W \subset R^p$، و ω یک فرم k بعدی در W باشد بطوری که ω_S یک فرم k بعدی در V است و $(\omega_S)_T$ و ω_{ST} هر دو فرمهایی k بعدی در E می‌باشند ، که در اینجا ST با $(ST)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x}))$ تعریف شده است . در این صورت ،

$$(\omega_S)_T = \omega_{ST}. \tag{71}$$

برهان . چنانچه ω و λ فرمهایی در W باشند ، قضیهٔ ۲۲۰۱۰ نشان می‌دهد که

$$((\omega \wedge \lambda)_S)_T = (\omega_S \wedge \lambda_S)_T = (\omega_S)_T \wedge (\lambda_S)_T$$

و

$$(\omega \wedge \lambda)_{ST} = \omega_{ST} \wedge \lambda_{ST}.$$

پس اگر (۷۱) برای ω و برای λ برقرار باشد ، نتیجه می‌شود که (۷۱) برای $\omega \wedge \lambda$ نیز برقرار است . چون هر فرم را می‌توان از فرمهای 0 بعدی و 1 بعدی با جمع و ضرب ساخت ، و چون (۷۱) برای فرمهای 0 بعدی بدیهی است ، کافی است (۷۱) را در حالت $\omega = dz_q$، $q = 1, \ldots, p$ اثبات نماییم . (نقاط E, V, W را بترتیب با $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ نشان می‌دهیم .)

فرض کنیم $t_1, \ldots, t_m$ مؤلفه‌های T ، $s_1, \ldots, s_p$ مؤلفه‌های S ، و $r_1, \ldots, r_p$ مؤلفه‌های ST باشند . هرگاه $\omega = dz_q$ ، آنگاه

$$\omega_S = ds_q = \sum_j (D_j s_q)(\mathbf{y})\, dy_j .$$

درنتیجه ، قاعدهٔ زنجیره‌ای ایجاب می‌کند که

$$(\omega_S)_T = \sum_j (D_j s_q)(T(\mathbf{x}))\, dt_j$$

$$= \sum_j (D_j s_q)(T(\mathbf{x})) \sum_i (D_i t_j)(\mathbf{x})\, dx_i$$
$$= \sum_i (D_i r_q)(\mathbf{x})\, dx_i = dr_q = \omega_{ST}.$$

۲۴۰۱۰ قضیه. فرض کنیم ω یک فرم k بعدی در مجموعهٔ باز $E \subset R^n$، Φ یک سطح k بعدی در E با قلمرو پارامتری $D \subset R^k$، و Δ سطح k بعدیی در R^k با قلمرو پارامتری D باشد که توسط $\Delta(\mathbf{u}) = \mathbf{u}(\mathbf{u} \in D)$ تعریف می‌شود. در این صورت،

$$\int_\Phi \omega = \int_\Delta \omega_\Phi .$$

برهان. فقط لازم است حالت

$$\omega = a(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

را در نظر بگیریم. گوییم هرگاه $\phi_1, \ldots, \phi_n$ مؤلفه‌های Φ باشند، آنگاه

$$\omega_\Phi = a(\Phi(\mathbf{u}))\, d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k} .$$

قضیه در صورتی نتیجه می‌شود که بتوان نشان داد

$$d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k} = J(\mathbf{u})\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k \tag{72}$$

که در آن

$$J(\mathbf{u}) = \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)},$$

زیرا (۷۲) ایجاب می‌کند که

$$\int_\Phi \omega = \int_D a(\Phi(\mathbf{u}))J(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}$$
$$= \int_\Delta a(\Phi(\mathbf{u}))J(\mathbf{u})\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k = \int_\Delta \omega_\Phi .$$

فرض کنیم $[A]$ ماتریس k در k با درایه‌های

$$\alpha(p, q) = (D_q \phi_{i_p})(\mathbf{u}) \qquad (p, q = 1, \ldots, k)$$

باشد. در این صورت،

$$d\phi_{i_p} = \sum_q \alpha(p, q)\, du_q ;$$

در نتیجه،

$$d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k} = \sum \alpha(1, q_1) \cdots \alpha(k, q_k)\, du_{q_1} \wedge \cdots \wedge du_{q_k} .$$

در مجموع آخری $q_1, \ldots, q_k$ مستقلا " روی $1, \ldots, k$ تغییر می‌کنند. رابطهٔ پادتعویضپذیری (۴۲) ایجاب می‌کند که

$$du_{q_1} \wedge \cdots \wedge du_{q_k} = s(q_1, \ldots, q_k)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k,$$

که در آن s همان s بوده در تعریف ۳۳۰۹ است. با به کار بردن این تعریف خواهیم دید که

$$d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k} = \det[A]\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k;$$

و چون $J(\mathbf{u}) = \det[A]$ ، (۷۲) ثابت شده است.

نتیجهٔ نهایی این بخش دو قضیهٔ قبلی را در هم می‌آمیزد.

۲۵۰۱۰ قضیه. فرض کنیم T یک $\mathscr{C}'$ـنگاشت از مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ بتوی مجموعهٔ باز $V \subset R^m$، Φ یک سطح k بعدی در E، و ω یک فرم k بعدی در V باشد. در این صورت،

$$\int_{T\Phi} \omega = \int_{\Phi} \omega_T.$$

برهان. D را قلمرو پارامتری Φ (درنتیجه، از آن $T\Phi$) می‌انگاریم، و Δ را همان Δـی قضیهٔ ۲۴۰۱۰ تعریف می‌کنیم. در این صورت،

$$\int_{T\Phi} \omega = \int_{\Delta} \omega_{T\Phi} = \int_{\Delta} (\omega_T)_{\Phi} = \int_{\Phi} \omega_T.$$

اولین این تساویها قضیهٔ ۲۴۰۱۰ است که به جای Φ در مورد $T\Phi$ به کاررفته‌است. دومین آنها از قضیهٔ ۲۳۰۱۰ نتیجه می‌شود. تساوی سوم قضیهٔ ۲۴۰۱۰ است با ω_T به جای ω.

سادکها و زنجیرها

۲۶۰۱۰ سادکهای مستوی. نگاشت $\mathbf{f}$ که فضای برداری X را بتوی فضای برداری Y می‌برد مستوی نام دارد هرگاه $\mathbf{f} - \mathbf{f}(0)$ خطی باشد. به‌عبارت دیگر، شرط آن است که به‌ازای $A \in L(X, Y)$ ای

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(0) + A\mathbf{x}. \tag{73}$$

لذا، یک نگاشت‌مستوی از R^k بتوی R^n در صورتی معین است که $\mathbf{f}(0)$ و $\mathbf{f}(\mathbf{e}_i)$ به

زای $1 \le i \le k$ معلوم باشند؛ طبق معمول، $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ پایهٔ متعارف R^k خواهد بود.
سادک متعارف Q^k مجموعهٔ تمام $\mathbf{u} \in R^k$ ها به شکل

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{e}_i \tag{74}$$

که در آنها به ازای $i = 1, \ldots, k$، $\alpha_i \ge 0$، و $\Sigma\alpha_i \le 1$ تعریف می‌شود.

حال فرض می‌کنیم $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ نقاطی از R^n باشند. **سادک k بعدی مستوی جهتدار**

$$\sigma = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k] \tag{75}$$

سطح k بعد یی در R^n تعریف می‌شود با قلمرو پارامتری Q^k که با نگاشت مستوی

$$\sigma(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{e}_k) = \mathbf{p}_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0) \tag{76}$$

مشخص می‌گردد. توجه دارید که σ به وسیلهٔ

$$\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{p}_0, \qquad \sigma(\mathbf{e}_i) = \mathbf{p}_i \qquad (1 \le i \le k) \tag{77}$$

و

$$\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_0 + A\mathbf{u} \qquad (\mathbf{u} \in Q^k) \tag{78}$$

که در آن $A \in L(R^k, R^n)$ و $A\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0$ به ازای $1 \le i \le k$ مشخص می‌گردد.

σ را **جهتدار** نامیم تا بر این نکته که ترتیب رئوس $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k$ به حساب آمده است تأکید کرده باشیم. هرگاه

$$\bar{\sigma} = [p_{i_0}, p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}] \tag{79}$$

که در آن $\{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$ جایگشتی از مجموعهٔ مرتب $\{0, 1, \ldots, k\}$ است، نماد

$$\bar{\sigma} = s(i_0, i_1, \ldots, i_k)\sigma \tag{80}$$

را که در آن s تابع ذکرشده در تعریف ۳۳۰۹ است می‌پذیریم. لذا، بسته به اینکه $s = 1$ یا $s = -1$، $\bar{\sigma} = \pm\sigma$. به بیان دقیق، با قبول (۷۵) و (۷۶) به عنوان تعریف σ، نباید بنویسیم $\bar{\sigma} = \sigma$ مگر اینکه $i_0 = 0, \ldots, i_k = k$، حتی اگر $s(i_0, \ldots, i_k) = 1$؛ آنچه در اینجا داریم یک رابطهٔ هم ارزی است نه یک تساوی. بهرحال، برای اهداف ما، نماد فوق‌الذکر با قضیهٔ ۲۷۰۱۰ توجیه می‌شود.

هرگاه $\bar{\sigma} = \varepsilon\sigma$ (با استفاده از قرارداد فوق) و $\varepsilon = 1$، می‌گوییم $\bar{\sigma}$ و σ دارای یک **جهت هستند**. چنانچه $\varepsilon = -1$، گوییم $\bar{\sigma}$ و σ **جهتهای مختلفی** دارند. توجه کنید که ما منظور خود را از "جهتِ یک سادک" تعریف نکرده‌ایم. آنچه تعریف شده رابطه‌ای است

بین جفتهایی از سادکها که دارای یک مجموعه از رئوسند ، و این رابطه عبارت است از "دارای یک جهت بودن" .

لکن حالتی هست که در آن می‌توان جهت یک سادک را به طور طبیعی تعریف کرد . این وقتی روی می‌دهد که $n = k$ و بردارهای $\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0 \ (1 \le i \le k)$ **مستقل** می‌باشند . در این وضع ، تبدیل خطی A در (۷۸) معکوسپذیر است ، و دترمینانش (که همان ژاکوبی σ است) 0 نمی‌باشد . در این صورت ، σ **به طور مثبت** (**یا به طور منفی**) جهتدار است هرگاه $\det A$ مثبت (یامنفی) باشد . بخصوص ، سادک $[0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k]$ در R^k که با نگاشت همانی داده شده ، جهت مثبت خواهد داشت .

تا بحال فرض‌کرده‌ایم $k \ge 1$. یک **سادک 0 بعدی جهتدار** یک نقطه به انضمام علامتی مربوط به آن تعریف می‌شود . می‌نویسیم $\sigma = +\mathbf{p}_0$ یا $\sigma = -\mathbf{p}_0$. اگر $\sigma = \varepsilon \mathbf{p}_0 \ (\varepsilon = \pm 1)$ و f یک فرم 0 بعدی (یعنی ، یک تابع حقیقی) باشد ، تعریف می‌کنیم

$$\int_\sigma f = \varepsilon f(p_0).$$

۲۷.۱۰ قضیه. *هرگاه σ یک‌سادک k بعدی‌مستقیم‌الخط جهتدار درمجموعهٔ باز $E \subset R^n$ باشد و $\bar{\sigma} = \varepsilon \sigma$ ، آنگاه به ازای هر فرم k بعدی ω در E*

$$\int_{\bar{\sigma}} \omega = \varepsilon \int_\sigma \omega. \tag{81}$$

برهان. به ازای $k = 0$ ، (۸۱) از تعریف قبلی نتیجه می‌شود . پس فرض می‌کنیم $k \ge 1$ و σ با (۷۵) داده شده باشد .

فرض کنیم $1 \le j \le k$ و $\bar{\sigma}$ از σ با تعویض $\mathbf{p}_0$ و $\mathbf{p}_j$ با هم به دست آید . در این صورت، $\varepsilon = -1$ و

$$\bar{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_j + B\mathbf{u} \qquad (\mathbf{u} \in Q^k),$$

که در آن B نگاشت خطیی از R^k بتوی R^n است که با $B\mathbf{e}_j = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_j$ و $B\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$ در صورت $i \neq j$ ، تعریف می‌شود . چنانچه بنویسیم $A\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i \ (1 \le i \le k)$ ، که‌در آن A با (۷۸) داده شده ، بردارهای ستونی B (یعنی ، بردارهای $B\mathbf{e}_i$) عبارت خواهند بود از

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_j, \ldots, \mathbf{x}_{j-1} - \mathbf{x}_j, \ -\mathbf{x}_j, \ \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j .$$

اگر ستون j م را از هر ستون دیگر کم کنیم ، هیچیک از دترمینانهای موجود در (۳۵)

تغییر نمی‌کند، و ما ستونهای $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}, -\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_k$ را خواهیم داشت. اینها با ستونهای A فقط در علامت ستون j م فرق دارند. پس (۸۱) برای این حالت برقرار است.

اینک فرض می‌کنیم $0 < i < j \leq k$ و $\bar{\sigma}$ از σ با تعویض $\mathbf{p}_i$ و $\mathbf{p}_j$ با هم به دست آید. پس $\bar{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_0 + C\mathbf{u}$ که در آن C همان ستونهای A را دارد جز آنکه ستونهای i م و j مش با هم عوض شده‌اند. این باز ایجاب می‌کند (۸۱) برقرار است، زیرا $\varepsilon = -1$.

چون هر جایگشت $\{0, 1, \ldots, k\}$ ترکیبی است از حالات خاصی که هم‌اکنون مورد بحث بودند، پس حالت کلی نتیجه خواهد شد.

۱۰ • ۲۸ زنجیرهای مستوی. یک زنجیر k بعدی مستوی Γ در مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ گردآیه‌ای است از تعدادی متناهی سادک k بعدی جهتدار $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ در E. این سادکها لزوماً متمایز نیستند. لذا، ممکن است یک سادک در Γ چند بار ظاهر شود.

چنانچه Γ مثل بالا و ω یک فرم k بعدی در E باشد، تعریف می‌کنیم

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{i=1}^{r} \int_{\sigma_i} \omega. \tag{82}$$

یک سطح k بعدی Φ در E را می‌توان به مشابهٔ تابعی گرفت که قلمروش گردآیهٔ تمام فرمهای k بعدی در E باشد و عدد $\int_\Phi \omega$ را به ω مربوط کند. چون توابع حقیقی را می‌توان (مثل تعریف ۳۰۴) بهم افزود، این مطلب استفاده از نماد

$$\Gamma = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r \tag{83}$$

یا، مختصرتر،

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \tag{84}$$

را برای بیان اینکه (۸۲) به ازای هر فرم k بعدی ω در E برقرار است معمول خواهد کرد.

برای آنکه از سوء تعبیر اجتناب شود، صریحاً قید می‌کنیم که نمادهای معرفی شده با (۸۳) و (۸۰) را باید با احتیاط به کار برد. مسئله این است که هر سادک k بعدی مستوی جهتدار σ در R^n تابعی است به دو صورت، با قلمروها و بردهای مختلف؛ و در نتیجه، دو عمل جمع کاملاً متفاوت امکان‌پذیر است. در اصل، σ به صورت یک تابع R^n مقداری با قلمرو Q^k تعریف شده بود. از اینجهت بود که $\sigma_1+\sigma_2$ را می‌شد به صورت تابعی

چون تعبیر کرد که بردار $\sigma_1(\mathbf{u}) + \sigma_2(\mathbf{u})$ را به هر $\mathbf{u} \in Q^k$ مربوط می‌کند. توجه کنید که σ در این صورت باز یک سادک k بعدی مستوی جهتدار در R^n است! این همان چیزی که (۸۳) معنی می‌دهد نیست.

به عنوان مثال، هرگاه مثل (۸۰) داشته باشیم $\sigma_2 = -\sigma_1$ (یعنی، هرگاه σ_1 و σ_2 یک مجموعه رأس داشته ولی متقابلاً " جهتدار باشند) و $\Gamma = \sigma_1 + \sigma_2$ آنگاه به ازای هر ω، $\int_\Gamma \omega = 0$، و می‌توان این مطلب را با نوشتن $\Gamma = 0$ یا $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ بیان کرد. این بدان معنی که $\sigma_1(\mathbf{u}) + \sigma_2(\mathbf{u})$ بردار پوچ R^n است نخواهد بود.

۲۹.۱۰ کرانه‌ها. به ازای $k \geq 1$، *کرانهٔ* سادک k بعدی مستوی جهتدار

$$\sigma = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k]$$

زنجیر $(k-1)$ بعدی مستوی

$$\partial\sigma = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j [\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \ldots, \mathbf{p}_k] \tag{85}$$

تعریف می‌شود.

به عنوان مثال، هرگاه $\sigma = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]$، آنگاه

$$\partial\sigma = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] - [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2] + [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1] = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1] + [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] + [\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_0],$$

که با مفهوم عادی کرانهٔ جهتدار یک مثلث مطابقت دارد.

به ازای $1 \leq j \leq k$ می‌بینیم که سادک $\sigma_j = [\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \ldots, \mathbf{p}_k]$ ذکرشده در (۸۵)، Q^{k-1} را به عنوان قلمرو پارامتری خود دارد و با

$$\sigma_j(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_0 + B\mathbf{u} \qquad (\mathbf{u} \in Q^{k-1}) \tag{86}$$

تعریف می‌شود، که در آن B نگاشت خطی از R^{k-1} به R^n است که با

$$Be_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0 \qquad (1 \leq i \leq j-1),$$
$$Be_i = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_0 \qquad (j \leq i \leq k-1)$$

مشخص می‌گردد.

سادک

$$\sigma_0 = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_k],$$

که این نیز در (۸۵) آمده، با نگاشت

$$\sigma_0(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_1 + B\mathbf{u}$$

داده می‌شود که در آن به ازای $1 \leq i \leq k-1$، $Be_i = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_1$.

۳۰۰۱۰ سادکها و زنجیرهای مشتقپذیر. فرض‌کنیم T یک $\mathscr{C}''$ـنگاشت از مجموعهٔ باز $E \subset R^n$بتوی مجموعهٔ باز$V \subset R^m$باشد؛ T الزاما" یک به یک نیست. هرگاه σ یک سادک k بعدی مستوی جهتدار در E باشد، آنگاه نگاشت مرکب $\Phi = T \circ \sigma$(که ما گاهی آن را به شکل ساده‌تر $T\sigma$ خواهیم نوشت) یک سطح k بعدی در V با قلمرو پارامتری Q^k خواهد بود. Φ را یک **سادک k بعدی جهتدار از ردهٔ** $\mathscr{C}''$ خواهیم نامید.

هر گردآیهٔ متناهی چون Ψ از سادکهای k بعدی‌جهتدار $\Phi_1,\ldots,\Phi_r$از ردهٔ $\mathscr{C}''$ در V یک **زنجیر k بعدی از ردهٔ** $\mathscr{C}''$در V نامیده می‌شود. اگر ω یک فرم k بعدی در V باشد، تعریف می‌کنیم

$$\int_{\Psi} \omega = \sum_{i=1}^{r} \int_{\Phi_i} \omega , \tag{87}$$

و نماد مشابه$\Psi = \Sigma\Phi_i$ را به کار خواهیم برد.

چنانچه $\Gamma = \Sigma\sigma_i$ یک زنجیر مستوی باشد و$\Phi_i = T \circ \sigma_i$، نیز می‌نویسیم$\Psi = T \circ \Gamma$ یا

$$T\left(\sum \sigma_i\right) = \sum T\sigma_i . \tag{88}$$

کرانهٔ سادک k بعدی جهتدار$\Phi = T \circ \sigma$، یعنی $\partial\Phi$ ، زنجیر $(k-1)$ بعدی

$$\partial\Phi = T(\partial\sigma) \tag{89}$$

تعریف می‌گردد.

در توجیه (۸۹) ملاحظه می‌کنیم که هرگاه T مستوی باشد، $\Phi = T \circ \sigma$ یک سادک k بعدی مستوی‌جهتدار است، که در این حالت (۸۹) مورد تعریف نداشته بلکه نتیجه‌ای از (۸۵) می‌باشد. لذا، (۸۹) این حالت خاص را تعمیم خواهد داد.

بی‌فاصله می‌بینیم که $\partial\Phi$ از ردهٔ$\mathscr{C}''$ است هرگاه Φ نیز چنین باشد.

سرانجام، کرانهٔ $\partial\Psi$ زنجیر k بعدی$\Psi = \Sigma\Phi_i$را زنجیر $(k-1)$ بعدی

$$\partial\Psi = \sum \partial\Phi_i \tag{90}$$

تعریف می‌کنیم.

۳۱۰۱۰ کرانه‌های به طور مثبت جهتدار. تا بحال کرانه‌ها را به زنجیرها نسبت داده‌ایم نه به زیرمجموعه‌های R^n. این مفهوم کرانه درست همانی است که برای صورت و برهان قضیهٔ استوکس مناسبترین است. لکن، در عمل، بویژه درR^2 یا R^3 ، رسم و شایسته است که از "کرانه‌های جهتدار" بعضی مجموعه‌ها نیز سخن برود. حال این مفهوم را به‌طور مختصر توصیف می‌کنیم.

فرض کنیم Q^n سادک متعارف در R^n و σ_0 نگاشت همانی با قلمرو Q^n باشد. همانطور که در بخش ۲۶۰۱۰ دیدیم، σ_0 را می‌شود به عنوان یک سادک n بعدی به طور مثبت جهتدار در R^n گرفت. کرانه‌اش $\partial\sigma_0$ یک زنجیر $(n-1)$ بعدی مستوی است. این زنجیر **کرانهٔ به‌طور مثبت جهتدار مجموعهٔ** Q^n نامیده می‌شود.

به عنوان مثال، کرانهٔ به طور مثبت جهتدار Q^3 عبارت است از

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] - [0, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + [0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] - [0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2].$$

حال فرض کنیم T یک نگاشت 1-1 از Q^n بتوی R^n، از ردهٔ $\mathscr{C}''$، باشد که ژاکوبیش (اقلاً درون Q^n) مثبت است. قرار می‌دهیم $E = T(Q^n)$. بنابر قضیهٔ تابع معکوس، E بست زیر مجموعهٔ بازی از R^n است. ما کرانهٔ به طور مثبت جهتدار مجموعهٔ E را برابر زنجیر $(n-1)$ بعدی

$$\partial T = T(\partial\sigma_0)$$

تعریف می‌کنیم، و می‌توانیم این زنجیر $(n-1)$ بعدی را با ∂E نشان دهیم.

در اینجا سوءال واضحی مطرح می‌شود: هرگاه $E = T_1(Q^n) = T_2(Q^n)$ و ژاکوبیهای T_1 و T_2 هر دو مثبت باشند، آیا تساوی $\partial T_1 = \partial T_2$ درست است؟ یعنی، آیا تساوی

$$\int_{\partial T_1} \omega = \int_{\partial T_2} \omega$$

برای هرفرم $(n-1)$ بعدی ω برقرار است؟ پاسخ مثبت است، لکن ما برهان آن را حذف می‌کنیم. (برای مشاهدهٔ یک نمونه، آخر این بخش را با تمرین ۱۷ مقایسه نمایید.)

از این هم می‌توان پا را فراتر گذاشت. فرض کنیم

$$\Omega = E_1 \cup \cdots \cup E_r$$

که‌درآن $E_i = T_i(Q^n)$، هر T_i از خواصی‌که T در بالا داشت برخوردار است، و درونهای مجموعه‌های E_i دوبدو ازهم جدا می‌باشند. در این صورت، زنجیر $(n-1)$ بعدی

$$\partial T_1 + \cdots + \partial T_r = \partial\Omega$$

کرانهٔ به طور مثبت جهتدار Ω نام خواهد داشت.

به عنوان مثال، مربع یکهٔ I^2 در R^2 اجتماع $\sigma_1(Q^2)$ و $\sigma_2(Q^2)$ است که در آن

$$\sigma_1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \qquad \sigma_2(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{u}.$$

σ_1 و σ_2 هر دو دارای ژاکوبی $0 <$ یک اند. چون

$$\sigma_1 = [0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], \qquad \sigma_2 = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1]،$$

خواهیم داشت

$$\partial\sigma_1 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] - [0, \mathbf{e}_2] + [0, \mathbf{e}_1],$$

$$\partial\sigma_2 = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1] - [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1] + [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2];$$

مجموع این دوکرانه عبارت خواهد بود از

$$\partial I^2 = [0, \mathbf{e}_1] + [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2] + [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2] + [\mathbf{e}_2, 0],$$

کرانهٔ به طور مثبت جهتدار I^2 . توجه کنید که $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ ، $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1]$ را حذف کرده است.

هرگاه Φ یک سطح 2 بعدی در R^m با قلمرو پارامتری I^2 باشد، آنگاه Φ (ملحوظ به شکل تابعی بر فرمهای 2 بعدی) با زنجیر 2 بعدی

$$\Phi \circ \sigma_1 + \Phi \circ \sigma_2$$

یکی است. لذا،

$$\begin{aligned}\partial\Phi &= \partial(\Phi \circ \sigma_1) + \partial(\Phi \circ \sigma_2)\\ &= \Phi(\partial\sigma_1) + \Phi(\partial\sigma_2) = \Phi(\partial I^2).\end{aligned}$$

به عبارت دیگر، اگر قلمرو پارامتری Φ مربع I^2 باشد، ارجاع به سادک Q^2 لازم نیست، بلکه می‌شود $\partial\Phi$ را مستقیماً از ∂I^2 به دست آورد.

مثالهای دیگر را می‌توان در تمرینهای ۱۷ تا ۱۹ یافت.

۳۲۰۱۰ مثال. به ازای $0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 2\pi$ تعریف می‌کنیم

$$\Sigma(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

پس Σ یک سطح 2 بعدی در R^3 است که قلمرو پارامتریش مستطیل $D \subset R^2$ است و بردش کرهٔ یکه در R^3 می‌باشد. کرانهٔ آن عبارت خواهد بود از

$$\partial\Sigma = \Sigma(\partial D) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

که در آن

$$\begin{aligned}\gamma_1(u) &= \Sigma(u, 0) = (\sin u, 0, \cos u),\\ \gamma_2(v) &= \Sigma(\pi, v) = (0, 0, -1),\\ \gamma_3(u) &= \Sigma(\pi - u, 2\pi) = (\sin u, 0, -\cos u),\\ \gamma_4(v) &= \Sigma(0, 2\pi - v) = (0, 0, 1),\end{aligned}$$

با این خاصیت که $[0, \pi]$ و $[0, 2\pi]$ بترتیب بازه‌های پارامتری برای u و v می‌باشند.

چون γ_2 و γ_4 ثابتند، مشتقاتشان 0 است. در نتیجه، انتگرال هر فرم 1 بعدی روی γ_2 یا γ_4 صفر می‌باشد. [ر.ک. مثال ۱۲۰۱ (آ).]

و چون $\gamma_3(u) = \gamma_1(\pi - u)$،کاربرد مستقیم (۳۵) نشان می‌دهد که به ازای هر فرم 1 بعدی ω

$$\int_{\gamma_3} \omega = -\int_{\gamma_1} \omega.$$

لذا، $\int_{\partial\Sigma} \omega = 0$ و نتیجه خواهیم گرفت که $\partial\Sigma = 0$.

(با اصطلاحات جغرافیا، $\partial\Sigma$ از قطب شمال N شروع به حرکت می‌کند، در امتداد یک نصف‌النهار به سوی قطب جنوب S می‌رود، در S مکث می‌کند، به N در امتداد همان نصف‌النهار باز می‌گردد، وسرانجام در N توقف خواهد کرد. دو مسیر در امتداد نصف‌النهار در جهات مختلف می‌باشند. از اینرو، دو انتگرال خط یکدیگر را حذف خواهند کرد. در تمرین ۳۲ نیز یک منحنی وجود دارد که دوبار در کرانه ظاهر می‌شود، منتها بدون حذف.)

قضیهٔ استوکس

۱۰.۳۳ قضیه. هرگاه Ψ یک زنجیر k بعدی از ردهٔ $\mathscr{C}''$ در مجموعهٔ باز $V \subset R^m$ و ω یک فرم $(k-1)$ بعدی از ردهٔ $\mathscr{C}'$ در V باشد، آنگاه

$$\int_{\Psi} d\omega = \int_{\partial\Psi} \omega. \tag{91}$$

حالت $k = m = 1$ چیزی جز قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (با فرض اضافی مشتقپذیری) نیست. حالت $k = m = 2$ قضیهٔ گرین است، و $k = m = 3$ "قضیهٔ دیورژانس" گاوس[1] را به دست می‌دهد. حالت $k = 2,\ m = 3$ قضیه‌ای است که در اصل توسط استوکس کشف شد. (کتاب اسپیواک[2] بخشی از زمینهٔ تاریخی مطلب را شرح می‌دهد.) این حالتهای خاص در آخر فصل حاضر بیشتر مطرح خواهند شد.

برهان. کافی است ثابت شود که به ازای هر سادک k بعدی جهتدار Φ از ردهٔ $\mathscr{C}''$ در V

$$\int_{\Phi} d\omega = \int_{\partial\Phi} \omega. \tag{92}$$

زیرا هرگاه (۹۲) ثابت شده باشد و $\Psi = \Sigma\Phi_i$، آنگاه (۸۷) و (۸۹) رابطهٔ (۹۱) را ایجاب خواهند کرد.

---

1. Gauss 2. Spivak

چنین Φ ای را ثابت گرفته قرار می‌دهیم

$$\sigma = [\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k]. \tag{93}$$

پس σ سادک k بعدی مستوی‌جهتدار با قلمرو پارامتری Q^k است که با نگاشت همانی تعریف می‌شود. چون Φ نیزبر Q^k تعریف‌شده است (ر.ک. تعریف ۳۰۰۱۰) و $\Phi \in \mathscr{C}''$، پس مجموعهٔ بازی مثل $E \subset R^k$ حاوی Q^k موجود و $\mathscr{C}''$-نگاشتی مانند T از E بتوی V وجود دارد بطوری که $\Phi = T \circ \sigma$. بنابر قضایای ۲۵۰۱۰ و ۲۲۰۱۰ (پ)، طرف چپ (۹۲) برابر

$$\int_{T\sigma} d\omega = \int_{\sigma} (d\omega)_T = \int_{\sigma} d(\omega_T)$$

است. کاربرد دیگری از قضیهٔ ۲۵۰۱۰ نشان می‌دهد که، بنابر (۸۹)، سمت‌راست (۹۲) مساوی

$$\int_{\partial(T\sigma)} \omega = \int_{T(\partial\sigma)} \omega = \int_{\partial\sigma} \omega_T$$

می‌باشد.

چون ω_T یک فرم $(k-1)$ بعدی در E است، ***برای اثبات (۹۲) فقط باید نشان داد که به ازای سادک خاص (۹۳) و هر فرم $(k-1)$ بعدی λ از ردهٔ $\mathscr{C}'$ در E***

$$\int_{\sigma} d\lambda = \int_{\partial\sigma} \lambda \cdot \tag{94}$$

چنانچه $k = 1$، تعریف سادک 0 بعدی جهتدار نشان می‌دهد که (۹۴) فقط ناظر به این حکم است که به ازای هر تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر f بر $[0, 1]$

$$\int_0^1 f'(u)\, du = f(1) - f(0), \tag{95}$$

که بنابر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال درست می‌باشد.

ازحالا به بعد فرض می‌کنیم $k > 1$، عدد صحیح r $(1 \le r \le k)$ را ثابت می‌گیریم، و $f \in \mathscr{C}'(E)$ را اختیار می‌نماییم. در این صورت، کافی است (۹۴) را برای حالت

$$\lambda = f(\mathbf{x})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{r-1} \wedge dx_{r+1} \wedge \cdots \wedge dx_k \tag{96}$$

ثابت کنیم، زیراهرفرم $(k-1)$ بعدی‌مجموعی ازاین فرمهای خاص، به ازای $r = 1, \ldots, k$ می‌باشد.

بنابر (۸۵)، کرانهٔ سادک (۹۳) عبارت است از

$$\partial\sigma = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k] + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \tau_i$$

که در آن، به ازای $i = 1, \ldots, k$،

$$\tau_i = [\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_k].$$

قرار می‌دهیم

$$\tau_0 = [\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{r-1}, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_k].$$

توجه کنیدکه τ_0 از $[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k]$ با $r-1$ تعویض متوالی $\mathbf{e}_r$ و همسایه‌های چپش به دست می‌آید. لذا،

$$\partial\sigma = (-1)^{r-1}\tau_0 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \tau_i. \tag{97}$$

هر τ_i، Q^{k-1} را به عنوان قلمرو پارامتری دارد.

هرگاه $\mathbf{x} = \tau_0(\mathbf{u})$ و $\mathbf{u} \in Q^{k-1}$، آنگاه

$$x_j = \begin{cases} u_j & (1 \le j < r), \\ 1 - (u_1 + \cdots + u_{k-1}) & (j = r), \\ u_{j-1} & (r < j \le k). \end{cases} \tag{98}$$

هرگاه $1 \le i \le k$، $\mathbf{u} \in Q^{k-1}$ و $\mathbf{x} = \tau_i(\mathbf{u})$، آنگاه

$$x_j = \begin{cases} u_j & (1 \le j < i), \\ 0 & (j = i), \\ u_{j-1} & (i < j \le k). \end{cases} \tag{99}$$

به ازای $0 \le i \le k$ فرض می‌کنیم J_i ژاکوبی نگاشت

$$(u_1, \ldots, u_{k-1}) \to (x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_k) \tag{100}$$

باشد که به‌وسیلهٔ τ_i القا می‌شود. وقتی $i = 0$ و وقتی $i = r$، (۹۸) و (۹۹) نشان می‌دهند که (۱۰۰) نگاشت همانی است. لذا، $J_0 = 1,\ J_r = 1$. به ازای i های دیگر، اینکه در (۹۹) $x_i = 0$ بیانگر آن است که J_i سطری از صفر دارد؛ درنتیجه، $J_i = 0$. از اینرو، بنابر (۳۵) و (۹۶)،

$$\int_{\tau_i} \lambda = 0 \qquad (i \ne 0, i \ne r). \tag{101}$$

پس (۹۷) نتیجه خواهد داد که

$$\int_{\partial\sigma} \lambda = (-1)^{r-1} \int_{\tau_0} \lambda + (-1)^r \int_{\tau_r} \lambda \tag{102}$$

$$= (-1)^{r-1} \int \quad [f(\tau_0(\mathbf{u})) - f(\tau_r(\mathbf{u}))]\, d\mathbf{u}\,.$$

از سوی دیگر،

$$d\lambda = (D_r f)(\mathbf{x}) dx_r \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{r-1} \wedge dx_{r+1} \wedge \cdots \wedge dx_k$$
$$= (-1)^{r-1} (D_r f)(\mathbf{x})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k\,.$$

در نتیجه،

$$\int_\sigma d\lambda = (-1)^{r-1} \int_{Q^k} (D_r f)(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{103}$$

ما (۱۰۳) را این طور حساب می‌کنیم که اول نسبت به x_r روی بازهٔ

$$[0, 1 - (x_1 + \cdots + x_{r-1} + x_{r+1} + \cdots + x_k)]$$

انتگرال می‌گیریم، بعد قرار می‌دهیم $(x_1, \ldots x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_k) = (u_1, \ldots, u_{k-1})$، و به کمک (۹۸) می‌بینیم که انتگرال روی Q^k در (۱۰۳) مساوی انتگرال روی Q^{k-1} در (۱۰۲) است. بنابراین، (۹۴) برقرار است و برهان تمام خواهد بود.

فرمهای بسته و فرمهای کامل

۳۴۰۱۰ تعریف. فرض‌کنیم ω یک فرم k بعدی درمجموعهٔ بازی چون $E \subset R^n$ باشد. چنانچه فرم $(k-1)$ بعدی λ در E چنان باشد که $\omega = d\lambda$، ω **در** E **کامل** نامیده می‌شود.

هرگاه ω از ردهٔ $\mathscr{C}'$ باشد و $d\omega = 0$، آنگاه ω **بسته** گفته خواهد شد.

قضیهٔ ۲۰۰۱۰ (ب) نشان می‌دهد که هر فرم کامل از ردهٔ $\mathscr{C}'$ بسته است.

در بعضی از مجموعه‌های E، مثلاً در آنهایی که محدبند، عکس مطلب فوق درست است؛ این مضمون قضیهٔ ۳۹۰۱۰ (که معمولاً به **لم پوانکاره**[1] مشهور است) وقضیهٔ ۴۰۰۱۰ می‌باشد. بهرحال، مثالهای ۳۶۰۱۰ و ۳۷۰۱۰ فرمهای بسته‌ای را نشان می‌دهند که کامل نیستند.

۳۵۰۱۰ چند تبصره

(آ) بسته‌بودن یا نبودن فرم k بعدی ω را می‌توان فقط با مشتقگیری از ضرایب در نمایش متعارف ω تحقیق کرد. به عنوان مثال، فرم 1 بعدی

1. Poincaré

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})\, dx_i , \tag{104}$$

با این خاصیت که به ازای مجموعهٔ بازی چون $E \subset R^n$، $f_i \in \mathscr{C}'(E)$ ، بسته است اگر و فقط اگر معادلات

$$(D_j f_i)(\mathbf{x}) = (D_i f_j)(\mathbf{x}) \tag{105}$$

برای تمام i و j ها در $\{1, \ldots, n\}$ و هر $\mathbf{x} \in E$ برقرار باشد.

توجه‌کنید که (۱۰۵) یک شرط "نقطه به نقطه" است ؛ این رابطه واجد هیچ خاصیتی همه‌جایی که به شکل E وابسته باشد نیست.

از سوی دیگر، بـرای آنکه نشـان دهیم ω در E کامل است باید وجود فرمی مانند λ ، که در E تعریف‌شده، را ثابت کنیم که $d\lambda = \omega$. این عمل به حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، نه فقط موضعی بلکه در تمام E ، منجر می‌شود. به عنوان مثال، برای اثبات اینکه (۱۰۴) در مجموعهٔ E کامل است باید یک تابع (یا فرم 0 بعدی) مانند $g \in \mathscr{C}'(E)$ پیدا کنیم که

$$(D_i g)(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in E,\ 1 \le i \le n). \tag{106}$$

البته، (۱۰۵) شرطی لازم برای حل پذیری (۱۰۶) خواهد بود.

(ب) فرض کنیم ω یک فرم k بعدی **کامل** در E باشد. در این صورت، یک‌فرم $(k-1)$ – بعدی‌مانند λ در E با خاصیت $d\lambda = \omega$ وجود دارد، و قضیهٔ استوکس حکم می‌کند که به‌ازای هر زنجیر k بعدی Ψ از ردهٔ $\mathscr{C}''$ در E

$$\int_{\Psi} \omega = \int_{\Psi} d\lambda = \int_{\partial\Psi} \lambda . \tag{107}$$

چنانچه Ψ_1 و Ψ_2 چنین زنجیـرهایی بـاشند و از یک کرانه برخوردار باشند، نتیجه خواهد شد که

$$\int_{\Psi_1} \omega = \int_{\Psi_2} \omega .$$

بخصوص، *انتگرال یک‌فرم k بعدی کامل در E روی هر زنجیر k بعدی در E که کرانه‌اش 0 باشد 0 است.*

به عنـوان حالت خاص مهمی از این، توجه می‌کنیم که انتگرالهای فرمهای 1 بعدی کامل در E روی منحنیهای (مشتقپذیر) بسته در E صفرند.

(پ) فرض کنیم ω یک فرم k بعدی **بسته** در E باشد. در این صورت، $d\omega = 0$ ، و قضیهٔ

استوکس حکم می‌کند که به ازای هر زنجیر $(k+1)$ بعدی Ψ از ردهٔ $\mathscr{C}''$ در E

$$\int_{\partial\Psi}\omega=\int_{\Psi}d\omega=0. \tag{108}$$

به‌عبارت دیگر، **انتگرالهای فرمهای k بعدی بسته در E روی زنجیرهای k بعدی یی که کرانه‌های زنجیرهای $(k+1)$ بعدی در E اند 0 می‌باشند.**

(ت) فرض کنیم Ψ یک زنجیر $(k+1)$ بعدی در E و λ یک فرم $(k-1)$ بعدی در E، هر دو از ردهٔ $\mathscr{C}''$، باشند. چون $d^2\lambda=0$، دوبار به کارگیری قضیهٔ استوکس نشان می‌دهد که

$$\int_{\partial\partial\Psi}\lambda=\int_{\partial\Psi}d\lambda=\int_{\Psi}d^2\lambda=0. \tag{109}$$

از این نتیجه می‌گیریم که $\partial^2\Psi=0$ به عبارت دیگر، **کرانهٔ یک کرانه 0 است.**

برای اثبات سر راست‌تر این، ر.ک. تمرین ۱۶.

۳۶.۱۰ مثال. فرض کنیم $E=R^2-\{0\}$، یعنی صفحه که مبدأش حذف شده است. فرم 1 بعدی

$$\eta=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} \tag{110}$$

در $R^2-\{0\}$ **بسته** است. این مطلب به‌آسانی با مشتقگیری تحقیق می‌شود. $r>0$ را ثابت گرفته تعریف می‌کنیم

$$\gamma(t)=(r\cos t,\ r\sin t)\qquad(0\le t\le 2\pi). \tag{111}$$

در این صورت، γ یک منحنی (یک "سادک 1 بعدی جهتدار") در $R^2-\{0\}$ است. چون $\gamma(0)=\gamma(2\pi)$، داریم

$$\partial\gamma=0. \tag{112}$$

محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که

$$\int_{\gamma}\eta=2\pi\neq 0. \tag{113}$$

آنچه در تبصره‌های ۳۵.۱۰ (ب) و (پ) آمده نشان می‌دهد که از (۱۱۳) می‌توانیم دو نتیجه بگیریم:

اول اینکه، η در $R^2-\{0\}$ **کامل نیست**، زیرا در غیر این صورت (۱۱۲) انتگرال

(۱۱۳) را مجبور به 0 می‌کرد .

دوم آنکه ، γ **کرانهٔ هیچ زنجیر 2 بعدی در** $R^2 - \{0\}$ (از ردهٔ $\mathscr{C}''$) نیست ، چرا که درغیر این صورت بسته بودن η انتگرال (۱۱۳) را 0 می‌گردانید .

۳۷۰۱۰ مثال . فرض کنیم $E = R^3 - \{0\}$ یعنی فضای 3 بعدی که مبدأش حذف شده است . تعریف می‌کنیم

$$\zeta = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \tag{114}$$

که در آن به جای (x_1, x_2, x_3) نوشته‌ایم (x, y, z) . مشتقگیری نشان می‌دهد که $d\zeta = 0$. درنتیجه، ζ یک فرم 2 بعدی بسته در $R^3 - \{0\}$ می‌باشد .

فرض‌کنیم Σ زنجیر 2 بعدیی در $R^3 - \{0\}$ باشد که درمثال ۳۲۰۱۰ ساخته شده بود . یادآورمی‌شویم که Σ یک پارامتری سازی کرهٔ یکه در R^3 است . با استفاده از مستطیل D مثال ۳۲۰۱۰ به عنوان قلمرو پارامتری ، به آسانی معلوم می‌شود که

$$\int_\Sigma \zeta = \int_D \sin u\,du\,dv = 4\pi \neq 0. \tag{115}$$

حال ، مثل مثال قبل ، می‌توان نتیجه گرفت که ζ در $R^3 - \{0\}$ کامل نیست (زیرا ، همانطورکه درمثال ۳۲۰۱۰ نشان داده‌شده ، $\partial\Sigma = 0$) و ، با آنکه $\partial\Sigma = 0$ ، کرهٔ Σ کرانهٔ هیچ زنجیر 3 بعدی در $R^3 - \{0\}$ (از ردهٔ $\mathscr{C}''$) نمی‌باشد .

نتیجهٔ زیر در برهان قضیهٔ ۳۹۰۱۰ به کار خواهد رفت .

۳۸۰۱۰ قضیه . فرض‌کنیم E یک مجموعهٔ باز محدب در R^n باشد ، $f \in \mathscr{C}'(E)$ ، p **یک عدد صحیح ،** $1 \le p \le n$ ، و

$$(D_j f)(\mathbf{x}) = 0 \qquad (p < j \le n, \mathbf{x} \in E). \tag{116}$$

در این صورت ، $F \in \mathscr{C}'(E)$ **ی هست بقسمی که**

$$(D_p F)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \qquad (D_j F)(\mathbf{x}) = 0 \qquad (p < j \le n, \mathbf{x} \in E). \tag{117}$$

برهان. می‌نویسیم $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_p, \mathbf{x}'')$ که در آن

$$\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_{p-1}),\ \mathbf{x}'' = (x_{p+1}, \ldots, x_n).$$

(وقتی $p = 1$، $\mathbf{x}'$ وجود ندارد؛ زمانی که $p = n$، $\mathbf{x}''$ وجود نخواهد داشت.) فرض کنیم V مجموعهٔ تمام $(\mathbf{x}', \alpha_p)$ هایی در R^p باشد که به ازای $\mathbf{x}''$ ی $(\mathbf{x}', x_p, \mathbf{x}'') \in E$. V، بدلیل تصویر E بودن، مجموعهٔ باز محدبی در R^p است. چون E محدب و (۱۱۶) برقرار است، $f(\mathbf{x})$ به $\mathbf{x}''$ بستگی ندارد. لذا، تابعی چون φ با قلمرو V هست بطوری که به ازای هر $\mathbf{x} \in E$

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}', x_p).$$

هرگاه $p = 1$، V یک قطعه در R^1 (احتمالاً بی‌کران) است. $c \in V$ را اختیار کرده تعریف می‌کنیم

$$F(\mathbf{x}) = \int_c^{x_1} \varphi(t)\, dt \qquad (\mathbf{x} \in E).$$

چنانچه $p > 1$، فرض می‌کنیم U مجموعهٔ تمام $\mathbf{x}'$ هایی در R^{p-1} باشد که به ازای x_p ای $(\mathbf{x}', x_p) \in V$. در این صورت، U یک مجموعهٔ باز محدب در R^{p-1} است، و تابعی مانند $\alpha \in \mathscr{C}'(U)$ وجود دارد بطوری‌که به ازای هر $\mathbf{x}' \in U$، $(\mathbf{x}', \alpha(\mathbf{x}')) \in V$ به عبارت دیگر، نمودار α در V قرار دارد (تمرین ۲۹). تعریف می‌کنیم

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\alpha(\mathbf{x}')}^{x_p} \varphi(\mathbf{x}', t)\, dt \qquad (\mathbf{x} \in E).$$

در هر حالت، F در (۱۱۷) صدق خواهد کرد.

(توجه: این قرارداد معمول را که $\int_a^b$، در صورتی که $b < a$، به معنی $-\int_b^a$ است به یاد بیاورید.)

۳۹.۱۰ قضیه. هرگاه $E \subset R^n$ محدب و باز بوده، $k \ge 1$، ω یک فرم k بعدی از ردهٔ $\mathscr{C}'$ در E باشد، و $d\omega = 0$، آنگاه یک فرم $(k-1)$ بعدی در E مانند λ هست بطوری که $\omega = d\lambda$.

مختصر بگوییم، فرمهای بسته در مجموعه‌های محدب کاملند.

برهان. به ازای $p = 1, \ldots, n$ فرض می‌کنیم Y_p مجموعهٔ تمام فرمهای k بعدی ω از ردهٔ $\mathscr{C}'$ در E باشد که نمایش متعارفشان

$$\omega = \sum_I f_I(\mathbf{x})\, dx_I \tag{118}$$

شامل dx_n ، dx_{p+1} نیست. به عبارت دیگر، اگر به ازای $\mathbf{x}$ ی در E ، $f_I(\mathbf{x}) \neq 0$ ، داشته باشیم $I \subset \{1, \ldots, p\}$.

به استقرا بر p عمل می‌کنیم.

ابتدا فرض می‌کنیم $\omega \in Y_1$. دراین‌صورت، $\omega = f(\mathbf{x})\, dx_1$. چون $d\omega = 0$، به ازای $1 < j \le n$ و $\mathbf{x} \in E$ خواهیم داشت $(D_j f)(\mathbf{x}) = 0$. بنابر قضیهٔ ۳۸۰۱۰، F ی در $\mathscr{C}'(E)$ هست بقسمی که به ازای $1 < j \le n$ داریم $D_1 F = f$ و $D_j F = 0$. پس

$$dF = (D_1 F)(\mathbf{x})\, dx_1 = f(\mathbf{x})\, dx_1 = \omega.$$

حال p را بزرگتر از یک گرفته فرض استقرای زیر را می‌پذیریم: **هر فرم k بعدی بسته‌ای که متعلق به Y_{p-1} باشد در E کامل است.**

$\omega \in Y_p$ را قسمی اختیار می‌کنیم که $d\omega = 0$. بنابر (۱۱۸)،

$$\sum_I \sum_{j=1}^{n} (D_j f_I)(\mathbf{x})\, dx_j \wedge dx_I = d\omega = 0. \tag{119}$$

j ی ثابتی را که $p < j \le n$ درنظرمی‌گیریم. هر I که در (۱۱۸) ظاهر می‌شود در $\{1, \ldots, p\}$ قرار دارد. هرگاه I_1 و I_2 دو تا از این اندیسهای k بعدی باشند و $I_1 \neq I_2$، اندیسهای $(k+1)$ بعدی (I_1, j) و (I_2, j) متمایزخواهند بود. لذا، حذفی در بین نیست و از (۱۱۹) نتیجه خواهیم گرفت که هر ضریب در (۱۱۸) در

$$(D_j f_I)(\mathbf{x}) = 0 \qquad (\mathbf{x} \in E,\ p < j \le n) \tag{120}$$

صدق می‌کند.

حال آن جملات (۱۱۸) را که شامل dx_p است گردآورده ω را به شکل

$$\omega = \alpha + \sum_{I_0} f_I(\mathbf{x})\, dx_{I_0} \wedge dx_p \tag{121}$$

می‌نویسیم که درآن $\alpha \in Y_{p-1}$ ، هر I_0 یک اندیس $(k-1)$ بعدی صعودی در $\{1, \ldots, p\}$ است، و $I = (I_0, p)$. بنابر (۱۲۰)، قضیهٔ ۳۸۰۱۰ توابعی چون $F_I \in \mathscr{C}'(E)$ را به دست می‌دهد که

$$D_p F_I = f_I, \qquad D_j F_I = 0 \qquad (p < j \le n). \tag{122}$$

قرار می‌دهیم

$$\beta = \sum_{I_0} F_I(\mathbf{x})\, dx_{I_0}, \tag{123}$$

و تعریف می‌کنیم $\gamma = \omega - (-1)^{k-1}\, d\beta$ چون β یک فرم $(k-1)$ بعدی است، نتیجه می‌شود که

$$\gamma = \omega - \sum_{I_0} \sum_{j=1}^{p} (D_j F_I)(\mathbf{x})\, dx_{I_0} \wedge dx_j$$
$$= \alpha - \sum_{I_0} \sum_{j=1}^{p-1} (D_j F_I)(\mathbf{x})\, dx_{I_0} \wedge dx_j ,$$

که بوضوح در Y_{p-1} است. چون $d\omega = 0$ و $d^2\beta = 0$، خواهیم داشت $d\gamma = 0$. پس فرض استقرای ما نشان می‌دهد که به ازای یک فرم $(k-1)$ بعدی در E مثل μ، $\gamma = d\mu$. چنانچه $\lambda = \mu + (-1)^{k-1}\beta$، نتیجه می‌گیریم که $\omega = d\lambda$.

این برهان را به استقرا به پایان خواهد برد.

۴۰۰۱۰ قضیهٔ k ای را که $1 \le k \le n$ ثابت می‌گیریم. فرض می‌کنیم $E \subset R^n$ مجموعهٔ بازی باشد که در آن هر فرم k بعدی بسته کامل است. T را یک $\mathscr{C}''$ نگاشت 1-1 از E بروی مجموعهٔ بازی چون $U \subset R^n$ می‌انگاریم که معکوسش S نیز از ردهٔ $\mathscr{C}''$ است.

در این صورت، هر فرم k بعدی بسته در U در U کامل خواهد بود.

توجه کنید که هر مجموعهٔ باز محدب E، بنابر قضیهٔ ۳۹۰۱۰، در فرض حاضر صدق می‌کند. رابطهٔ بین E و U را می‌توان با گفتن آنکه اینها $\mathscr{C}''$ معادل هستند بیان نمود.

پس هر فرم بسته در هر مجموعه که با یک مجموعهٔ بازمحدب $\mathscr{C}''$ـ معادل باشد کامل خواهد بود.

برهان. فرض کنیم ω یک فرم k بعدی در U با این خاصیت باشد که $d\omega = 0$. بنابر قضیهٔ ۲۲۰۱۰ (پ)، ω_T یک فرم k بعدی در E است که برای آن $d(\omega_T) = 0$. از اینرو، به ازای یک فرم $(k-1)$ بعدی در E مانند λ، $\omega_T = d\lambda$. به استناد قضیهٔ ۲۳۰۱۰ و کاربرد دیگری از قضیهٔ ۲۲۰۱۰ (پ)،

$$\omega = (\omega_T)_S = (d\lambda)_S = d(\lambda_S).$$

چون λ_S یک فرم $(k-1)$ بعدی در U است، ω در U کامل خواهد بود.

۴۱۰۱۰ تبصره. درکاربردها، حجره‌ها (ر.ک. تعریف ۱۷۰۲) اغلب قلمروهای پارامتری مناسبتری از سادکها هستند. اگر تمام بحث ما به جای سادکها بر حجره‌ها استوار می‌بود، محاسبات برهان قضیهٔ استوکس ساده‌تر می‌شد. (این عمل به این نحو در کتاب اسپیواک

شده است.) دلیل رجحان سادکها آن است که تعریف کرانهٔ یک سادک جهتدار آسانتر و طبیعی‌ترازکرانهٔ یکحجره به نظر می‌آید. (ر.ک. تمرین ۱۹.) همچنین، افراز مجموعه‌ها به سادکها (به نام "مثلث بندی") نقش مهمی در توپولوژی ایفا می‌کند، و میان بعضی از جنبه‌های توپولوژی، از یک سو، و فرمهای دیفرانسیل، از سوی دیگر، روابط نیرومندی وجود دارند. به این روابط در بخش ۳۵.۱۰ اشاره شده است. کتاب سینگر[1] و تورپ[2] حاوی مقدمهٔ مناسبی بر این موضوع است.

چون هرحجره‌را می‌شود مثلث بندی کرد، می‌توان آن را به عنوان یک زنجیر در نظر گرفت. در مثال ۳۲.۱۰ این کار برای بعد 2 شده است؛ برای بعد 3، ر.ک. تمرین ۱۸.

لم پوانکاره (قضیهٔ ۳۹.۱۰) را می‌توان به چند طریق اثبات کرد. مثلا"، ر.ک. صفحهٔ ۹۴ کتاب اسپیواک یا صفحهٔ ۲۸۰ کتاب فلمینگ[3]. در تمرینهای ۲۴ و ۲۷ به دو برهان ساده برای حالاتی خاص اشاره شده است.

آنالیز برداری

این فصل را با چند کاربرد از مطالب قبل در قضایای مربوط به آنالیز برداری در R^3 پایان می‌دهیم. اینها حالاتی خاص ازقضایایی درمورد فرمهای دیفرانسیل هستند، لیکن عموما" با اصطلاحات متفاوتی بیان شده‌اند. لذا، با مشکل ترجمه از یک زبان به زبان دیگر روبرو خواهیم بود.

۴۲.۱۰ میدانهای برداری. فرض‌کنیم $\mathbf{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + F_3\mathbf{e}_3$ یک‌نگاشت‌پیوسته‌از مجموعهٔ باز $E \subset R^3$ بتوی R^3 باشد. چون $\mathbf{F}$ به هر نقطهٔ E یک بردار مربوط می‌کند، $\mathbf{F}$ را گاهی، بویژه در فیزیک، یک میدان برداری می‌نامند. به هر چنین $\mathbf{F}$ ی فرم 1 بعدی

$$\lambda_{\mathbf{F}} = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \tag{124}$$

و فرم 2 بعدی

$$\omega_{\mathbf{F}} = F_1\,dy \wedge dz + F_2\,dz \wedge dx + F_3\,dx \wedge dy \tag{125}$$

مربوط می‌شوند. در اینجا، و تا پایان این فصل، از نماد مرسوم (x, y, z) به جای (x_1, x_2, x_3) استفاده خواهیم کرد.

---

1. Singer 2. Thorpe 3. Fleming

بعکس، واضح است که هر فرم I بعدی λ در E به ازای میدانی برداری چون $\mathbf{F}$ در E به صورت $\lambda_{\mathbf{F}}$ است، وهرفرم 2 بعدی ω به‌ازای $\mathbf{F}$ ی به شکل $\omega_{\mathbf{F}}$ می‌باشد. لذا، در R^3، بررسی فرمهای 1بعدی و 2 بعدی به موازات میدانهای برداری ادامه خواهد یافت.

چنانچه $u \in \mathscr{C}'(E)$ یک تابع حقیقی باشد، **گرادیان** آن

$$\nabla u = (D_1 u)\mathbf{e}_1 + (D_2 u)\mathbf{e}_2 + (D_3 u)\mathbf{e}_3$$

نمونه‌ای است از یک میدان برداری در E.

حال فرض می‌کنیم $\mathbf{F}$ یک میدان‌برداری‌در E از رده‌ٔ $\mathscr{C}'$ باشد. **تاو**آن $\nabla \times \mathbf{F}$ میدانی است برداری که در E با

$$\nabla \times \mathbf{F} = (D_2 F_3 - D_3 F_2)\mathbf{e}_1 + (D_3 F_1 - D_1 F_3)\mathbf{e}_2 + (D_1 F_2 - D_2 F_1)\mathbf{e}_3$$

تعریف می‌شود، و **دیورژانس** آن تابع حقیقی $\nabla \cdot \mathbf{F}$ است که در E با

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D_1 F_1 + D_2 F_2 + D_3 F_3$$

تعریف می‌گردد.

این کمیتها تعبیرهای فیزیکی متفاوتی دارند. برای تفصیل بیشتر، خواننده را به کتاب کلوگ [1] ارجاع می‌دهیم.

در اینجا چند رابطه بین گرادیانها، تاوها، و دیورژانسها بیان می‌شوند.

۴۳۰۱۰ قضیه. فرض کنیم E مجموعهٔ باز‌ی‌در R^3 بوده، $u \in \mathscr{C}''(E)$، و $\mathbf{G}$ یک‌میدان‌برداری در E از ردهٔ $\mathscr{C}''$ باشد.

(آ) هرگاه $\mathbf{F} = \nabla u$، آنگاه $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

(ب) هرگاه $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$، آنگاه $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

علاوه براین، هرگاه E با مجموعهٔ محدبی $\mathscr{C}''$-معادل باشد، (آ) و (ب) عکس دارند، که در آنها فرض می‌کنیم $\mathbf{F}$ یک میدان‌برداری در E از ردهٔ $\mathscr{C}'$ می‌باشد:

(آَ) هرگاه $\nabla \times \mathbf{F} = 0$، آنگاه به‌ازای u ای در $\mathscr{C}''(E)$، $\mathbf{F} = \nabla u$؛

(بَ) هرگاه $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$، آنگاه به‌ازای یک میدان برداری چون $\mathbf{G}$ در E از ردهٔ $\mathscr{C}''$، $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.

برهان. اگر تعریفهای ∇u، $\nabla \times \mathbf{F}$، و $\nabla \cdot \mathbf{F}$ را با فرمهای دیفرانسیل $\lambda_{\mathbf{F}}$ و $\omega_{\mathbf{F}}$ که با (۱۲۴) و (۱۲۵) داده شده‌اند مقایسه کنیم، چهارحکم زیر را خواهیم داشت:

---

1. O. D. Kellogg

$\mathbf{F} = \nabla u$ اگر و فقط اگر $\lambda_{\mathbf{F}} = du$ ؛

$\nabla \times \mathbf{F} = 0$ اگر و فقط اگر $d\lambda_{\mathbf{F}} = 0$ ؛

$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ اگر و فقط اگر $\omega_{\mathbf{F}} = d\lambda_{\mathbf{G}}$ ؛

$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ اگر و فقط اگر $d\omega_{\mathbf{F}} = 0$.

حال اگر $\mathbf{F} = \nabla u$ ، $\lambda_{\mathbf{F}} = du$ ، درنتیجه، $d\lambda_{\mathbf{F}} = d^2u = 0$ (قضیهٔ ۲۰.۱۰) ، که‌به‌این معنی است که $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. پس (آ) ثابت شده است .

و اما در باب (آَ) ، فرض‌این را می‌گوید که $d\lambda_{\mathbf{F}} = 0$ در E . بنابر قضیهٔ ۴۰.۱۰ ، به ازای یک فرم0 بعدی مانند u ، $\lambda_{\mathbf{F}} = du$. درنتیجه ، $\mathbf{F} = \nabla u$.

برهانهای (ب) و (بَ) دقیقاً" به یک شکل نتیجه می‌شوند .

۴۴.۱۰ عنصرهای حجم . فرم k بعدی

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

را عنصرحجم درR^k نام نهاده‌اند . غالبا "آن‌را با dV (یا ، در صورتی‌که نمودن بعد به طور صریح مطلوب نماید ، با dV_k)نشان می‌دهند ، و نماد

$$\int_\Phi f(\mathbf{x})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_\Phi f\, dV \tag{126}$$

زمانی به کار می‌رود که Φ یک سطح k بعدی به طور مثبت جهتدار درR^k و f بربرد Φ تابعی پیوسته باشد .

دلیل استفاده از ایـن اصطلاح بسیار روشن است : هرگاه D یک قلمرو پارامتری در R^kو Φ یک $\mathscr{C}'$- نگاشت 1-1 از D بتویR^k باژاکوبـی مثبت J_Φ باشد ، آنگاه سمت چپ (۱۲۶) ، به استناد (۳۵) و قضیهٔ ۹.۱۰ ، برابر است با

$$\int_D f(\Phi(\mathbf{u}))J_\Phi(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} = \int_{\Phi(D)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

بخصوص، وقتی $f = 1$ ، (۱۲۶) **حجم** Φ **را** تعریف می‌کند . ما پیشتر حالت خاصی از این را در (۳۶) دیدیم .

نماد معمول برای dV_2 علامت dA خواهد بود .

۴۵.۱۰ قضیهٔ گرین . فرض‌کنیم E مجموعهٔ بازی‌درR^2بوده ، $\alpha \in \mathscr{C}'(E)$ ، $\beta \in \mathscr{C}'(E)$ ،

و Ω یک زیرمجموعهٔ بستهٔ E باکرانهٔ به طورمثبت‌جهتدار $\partial\Omega$ ،بصورتی‌که‌دربخش ۳۱۰۱۰ توصیف شده ، باشد . در این صورت ،

$$\int_{\partial\Omega}(\alpha\, dx + \beta\, dy) = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) dA. \tag{127}$$

برهان . قرار می‌دهیم $\lambda = \alpha\, dx + \beta\, dy$.در این صورت ،

$$\begin{aligned} d\lambda &= (D_2\alpha)\, dy \wedge dx + (D_1\beta)\, dx \wedge dy \\ &= (D_1\beta - D_2\alpha)\, dA, \end{aligned}$$

و (۱۲۷) با

$$\int_{\partial\Omega}\lambda = \int_{\Omega} d\lambda,$$

یکی است ، که بنابر قضیهٔ ۳۳۰۱۰ درست می‌باشد .

به ازای $\alpha(x, y) = -y$ و $\beta(x, y) = x$ ، (۱۲۷) به صورت

$$\tfrac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\, dy - y\, dx) = A(\Omega), \tag{128}$$

یعنی مساحت Ω ، در خواهد آمد .

با فرض $\alpha = 0, \beta = x$ ،فرمول مشابهی به دست می‌آید . مثال ۱۲۰۱۰(ب) حالت خاصی از این را شامل است .

۴۶۰۱۰ عنصرهای سطح در R^3. فرض کنیم Φ یک سطح 2 بعدی درR^3از ردهٔ$\mathscr{C}'$ و با قلمرو پارامتری$D \subset R^2$ باشد . به هر نقطهٔ $(u, v) \in D$ بردار

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathbf{e}_3 \tag{129}$$

را مربوط می‌کنیم . ژاکوبیهای در (۱۲۹) در حکم معادلهٔ

$$(x, y, z) = \Phi(u, v) \tag{130}$$

می‌باشند .

اگر f تابع پیوسته‌ای بر $\Phi(D)$ باشد ، *انتگرال سطح* f روی Φ مساوی

$$\int_{\Phi} f\, dA = \int_D f(\Phi(u, v))\,|\mathbf{N}(u, v)|\; du\, dv \tag{131}$$

تعریف می‌شود .

بویژه، وقتی $f = 1$ ، **مساحت** Φ ، یعنی

$$A(\Phi) = \int |\mathbf{N}(u, v)|\; du\, dv, \tag{132}$$

به دست خواهد آمد .

بحث زیرنشان می‌دهدکه (۱۳۱)و حالت خاصش (۱۳۲) تعریفهای معقولی هستند . همچنین ، ویژگیهای هندسی بردار $\mathbf{N}$ را شرح خواهد داد .

می‌نویسیم $\Phi = \varphi_1\mathbf{e}_1 + \varphi_2\mathbf{e}_2 + \varphi_3\mathbf{e}_3$ ، نقطهٔ $\mathbf{p}_0 = (u_0, \ v_0) \in D$ را ثابت می‌گیریم ، قرار می‌دهیم $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{p}_0)$ ، ونیز

$$\alpha_i = (D_1\varphi_i)(\mathbf{p}_0), \qquad \beta_i = (D_2\varphi_i)(\mathbf{p}_0) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{133}$$

و فرض می‌کنیم $T \in L(R^2, R^3)$ تبدیل خطیی باشد که با

$$T(u, v) = \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i u + \beta_i v)\mathbf{e}_i \tag{134}$$

تعریف می‌شود . توجه کنید که ، بنابر تعریف ۱۱۰۹ ، $T = \Phi'(\mathbf{p}_0)$.

حال فرض می‌کنیم رتبهٔ T مساوی 2 باشد . (هرگاه 1 یا 0 باشد ، $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ و صفحهٔ مماس‌مذکور درزیر به یک خط یا یک نقطه بدل می‌شود .) در این صورت،برد نگاشت مستوی

$$(u, v) \to \Phi(\mathbf{p}_0) + T(u, v)$$

صفحهٔ Π ، به نام **صفحهٔ مماس** به Φ در $\mathbf{p}_0$ ، خواهد بود . [ممکن است خواننده بخواهد Π را ، به جای در $\mathbf{p}_0$ ،صفحهٔ مماس در $\Phi(\mathbf{p}_0)$ بنامد . اگر Φ یک به یک نباشد ، این کار مشکلاتی تولید خواهد کرد .]

چنانچه (۱۳۳) را در (۱۲۹) به کار بریم ، خواهیم داشت

$$\mathbf{N} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\mathbf{e}_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_3, \tag{135}$$

و (۱۳۴) نشان می‌دهد که

$$T\mathbf{e}_1 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{e}_i, \qquad T\mathbf{e}_2 = \sum_{i=1}^{3} \beta_i \mathbf{e}_i. \tag{136}$$

حال محاسبه‌ای ساده به

$$\mathbf{N} \cdot (T\mathbf{e}_1) = 0 = \mathbf{N} \cdot (T\mathbf{e}_2) \tag{137}$$

منجر می‌شود . درنتیجه ، $\mathbf{N}$ بر Π عمود خواهد بود . ازاینروست که آن را **قائم** به Φ در $\mathbf{p}_0$ می‌نامند .

خاصیت دوم $\mathbf{N}$ ، که آن نیز با یک محاسبهٔ مستقیم و براساس (۱۳۵) و (۱۳۶) تحقیق می‌شود ، این است که دترمینان تبدیل خطی R^3 که $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ را به $\{T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, \mathbf{N}\}$ می‌برد $|\mathbf{N}|^2 > 0$ است (تمرین ۳۰) . لذا ، سادک 3 بعدی

$$[0, T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, \mathbf{N}] \tag{138}$$

به طور مثبت جهتدار خواهد بود.

خاصیت سوم $\mathbf{N}$ که به‌کار خواهیم برد نتیجه‌ای است از دو خاصیت اول: دترمینان فوق‌الذکر، که مقدارش $|\mathbf{N}|^2$ است، حجم متوازی السطوحی است به اضلاع $[0, T\mathbf{e}_1]$، $[0, T\mathbf{e}_2]$، و $[0, \mathbf{N}]$. به‌استناد (۱۳۷)، $[0, \mathbf{N}]$ به‌دوضلع دیگر عمود است. **بنابر‌این، مساحت متوازی الاضلاع با راٴسهای**

$$0, T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \tag{139}$$

برابر $|\mathbf{N}|$ می‌باشد.

این متوازی‌الاضلاع نقش مربع یکه در R^2 تحت T است. چنانچه E مستطیل دلخواهی در R^2 باشد، (ازخطی بودن T) نتیجه می‌شود که مساحت متوازی الاضلاع $T(E)$ مساوی است با

$$A(T(E)) = |\mathbf{N}|\, A(E) = \int_E |\mathbf{N}(u_0, v_0)|\; du\, dv. \tag{140}$$

حال نتیجه می‌گیریم که (۱۳۲) درست است هرگاه که Φ مستوی باشد. برای توجیه تعریف (۱۳۲) در حالت کلی، D را به مستطیلهای کوچک تقسیم، نقطهٴ (u_0, v_0) را در هریک‌اختیار، و Φ را درهر مستطیل با صفحهٴ مماس نظیرش عوض می‌کنیم. دراین صورت، مجموع مساحات متوازی الاضلاعهای حاصل، که از طریق (۱۴۰) به دست می‌آیند، یک تقریب برای $A(\Phi)$ خواهد بود. بالاخره، شخص می‌تواند (۱۳۱) را به وسیلهٴ (۱۳۲) با تقریب f به توابع پله‌ای توجیه نماید.

۴۷۰۱۰ مثال. فرض کنیم $0 < a < b$ ثابت باشند. K را حجرهٴ 3 بعدیی می‌انگاریم که با

$$0 \le t \le a, \qquad 0 \le u \le 2\pi, \qquad 0 \le v \le 2\pi$$

مشخص می‌شود. معادلات

$$\begin{aligned} x &= t \cos u \\ y &= (b + t \sin u) \cos v \\ z &= (b + t \sin u) \sin v \end{aligned} \tag{141}$$

نگاشتی چون Ψ از R^3 بتوی R^3 راکه‌درون K یک‌به‌یک است وصف می‌کند بطوری که $\Psi(K)$ یک چنبرهٴ توپر می‌باشد. ژاکوبی آن عبارت است از

$$J_\Psi = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, u, v)} = t(b + t \sin u)$$

که بر K مثبت است جز روی وجه $t = 0$. چنانچه از J_Ψ روی K انتگرال بگیریم ، خواهیم داشت

$$\operatorname{vol}(\Psi(K)) = 2\pi^2 a^2 b,$$

مساوی حجم چنبرهٔ توپر ما .

حال زنجیر 2 بعدی $\Phi = \partial\Psi$ را درنظر می‌گیریم . (ر.ک. تمرین ۱۹.۱۰) Ψ وجوه $u = 0$ و $u = 2\pi$ از K را بروی یک نوار استوانه‌ای می‌نگارد منتها با جهتهای مخالف . Ψ وجوه $v = 0$ و $v = 2\pi$ را بروی یک قرص مستدیر می‌نگارد اما در جهتهای مخالف، Ψ وجه $t = 0$ را بروی یک دایره می‌نگارد ، که موجب 0 در زنجیر 2 بعدی $\partial\Psi$ می‌شود.(ژاکوبیهای مربوطه صفرند .) از اینرو ، Φ چیزی جز یک سطح 2 بعدی نیست که با گذاردن $t = a$ در (۱۴۱) به دست می‌آید ، با قلمرو پارامتری D که مربعی است که با $0 \le u \le 2\pi$ و $0 \le v \le 2\pi$ تعریف می‌شود .

پس، بنابر (۱۲۹) و (۱۴۱) ، قائم به Φ در $D \ni (u, v)$ بردار

$$\mathbf{N}(u, v) = a(b + a \sin u)\mathbf{n}(u, v)$$

است که در آن

$$\mathbf{n}(u, v) = (\cos u)\mathbf{e}_1 + (\sin u \cos v)\mathbf{e}_2 + (\sin u \sin v)\mathbf{e}_3.$$

چون $|\mathbf{n}(u, v)| = 1$ ، داریم $|\mathbf{N}(u, v)| = a(b + a \sin u)$ ، و اگر از این روی D انتگرال بگیریم ، (۱۳۱) نتیجه می‌دهد که

$$A(\Phi) = 4\pi^2 ab,$$

مساوی مساحت سطح چنبرهٔ ما .

هرگاه $\mathbf{N} = \mathbf{N}(u, v)$ را به‌صورت یک پاره‌خط جهتدار از $\Phi(u, v)$ به $\Phi(u, v) + \mathbf{N}(u, v)$ بگیریم ، آنگاه $\mathbf{N}$ **به طرف خارج** است ، یعنی از $\Psi(K)$ دور می‌شود . این بدان علت است که وقتی $t = a$ ، $\mathbf{J}_\Psi > 0$.

برای مثال، u و v را مساوی $\pi/2$ و t را برابر a اختیار می‌کنیم . این بزرگترین مقدار z را بر $\Psi(K)$ به دست می‌دهد ، و $\mathbf{N} = a(b + a)\mathbf{e}_3$ برای این انتخاب (u, v) " به طرف بالا " خواهد بود .

۴۸.۱۰ انتگرالهای فرمهای 1 بعدی در R^3 . فرض کنیم γ یک $\mathscr{C}'$-منحنی در مجموعهٔ باز

$E\subset R^3$ باشد، با بازهٔ پارامتری $[0,1]$ ، $\mathbf{F}$ را یک میدان برداری در E ، مثل بخش ۴۲۰۱۰، می‌انگاریم، و $\lambda_{\mathbf{F}}$ را با (۱۲۴) تعریف می‌کنیم. انتگرال $\lambda_{\mathbf{F}}$ روی γ را می‌توان بطریقی که اینک توصیف می‌کنیم از نو نوشت.

به ازای هر $u\in[0,1]$

$$\gamma'(u) = \gamma_1'(u)\mathbf{e}_1 + \gamma_2'(u)\mathbf{e}_2 + \gamma_3'(u)\mathbf{e}_3$$

بردار مماس بـه γ در u نامیده می‌شود. $\mathbf{t}=\mathbf{t}(u)$ را برداریکه در جهت $\gamma'(u)$ تعریف می‌کنیم. لذا،

$$\gamma'(u) = |\gamma'(u)|\mathbf{t}(u).$$

[اگر بـه ازای u ای $\gamma'(u)=\mathbf{0}$ ، قرار می‌دهیم $\mathbf{t}(u)=\mathbf{e}_1$ ؛ هر انتخاب دیگر به همین خوبی کارساز است.] بر طبق (۳۵)،

$$\begin{aligned}\int_\gamma \lambda_{\mathbf{F}} &= \sum_{i=1}^{3}\int_0^1 F_i(\gamma(u))\gamma_i'(u)\,du\\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(u))\cdot\gamma'(u)\,du \qquad (142)\\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(u))\cdot\mathbf{t}(u)|\gamma'(u)|\,du.\end{aligned}$$

قضیهٔ ۲۷۰۶ خواندن $|\gamma'(u)|\,du$ را با نام **عنصرطول‌قوس‌درامتداد** γ توجیه‌می‌کند. نماد مرسوم برای آن ds است، و (۱۴۲) از نو به شکل

$$\int_\gamma \lambda_{\mathbf{F}} = \int_\gamma (\mathbf{F}\cdot\mathbf{t})\,ds \qquad (143)$$

نوشته می‌شود.

چون $\mathbf{t}$ یک برداریکهٔ مماس‌به γ است، $\mathbf{F}\cdot\mathbf{t}$ **مؤلفهٔ مماسی** $\mathbf{F}$ درامتداد γ نام دارد.

طرف‌راست (۱۴۳) را باید به منزلهٔ اختصار بـرای آخرین انتگرال (۱۴۲) تلقی کرد. نکته‌آن است‌که $\mathbf{F}$ بر برد γ تعریف‌شده ولی $\mathbf{t}$ بر $[0,1]$ تعریف‌گشته است. از اینرو، باید $\mathbf{F}\cdot\mathbf{t}$ را به طرز صحیحی تعبیر نمود. البته، اگـر γ یک به یک باشد، $\mathbf{t}(u)$ را می‌شود با $\mathbf{t}(\gamma(u))$ عوض کرد و این مشکل مرتفع خواهد شد.

۴۹۰۱۰ انتگرالهای فرمهای 2 بعدی در R^3. فرض کنیم Φ یک سطح 2 بعدی در مجموعهٔ باز

$E \subset R^3$ از رده $\mathscr{C}'$ و با قلمرو پارامتری $D \subset R^2$ باشد. $\mathbf{F}$ را یک میدان برداری در E می‌انگاریم و $\omega_{\mathbf{F}}$ را با (۱۲۵) تعریف می‌کنیم . مثل بخش قبل ، نمایش متفاوتی از انتگرال $\omega_{\mathbf{F}}$ روی Φ به دست می‌آوریم .

بر طبق (۳۵) و (۱۲۹) ،

$$\begin{aligned}\int_\Phi \omega_{\mathbf{F}} &= \int_\Phi (F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy)\\ &= \int_D \left\{(F_1 \circ \Phi)\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + (F_2 \circ \Phi)\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + (F_3 \circ \Phi)\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right\} du\, dv\\ &= \int_D \mathbf{F}(\Phi(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v)\, du\, dv.\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$ برداریکه در جهت $\mathbf{N}(u, v)$ باشد . [اگر بـه ازای $(u, v) \in D$ ای $\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{0}$ ، $\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{e}_1$ را انتخـاب می‌کنیم .] در ایـن صـورت ، $\mathbf{N} = |\mathbf{N}|\mathbf{n}$؛ و درنتیجه ، انتگرال آخری به صورت

$$\int_D \mathbf{F}(\Phi(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v)\, |\mathbf{N}(u, v)|\, du\, dv$$

در می‌آید . بالاخره ، این را بنابر (۱۳۱) می‌توان به شکل

$$\int_\Phi \omega_{\mathbf{F}} = \int_\Phi (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dA \tag{144}$$

نوشت .

با تـوجه بـه معنی $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ ، تذکری که در آخر بخش ۴۸.۱۰ داده شد در اینجا نیز قابل بیان است .

حال می‌توانیم شکل اصلی قضیهٔ استوکس را بیان کنیم .

۵۰.۱۰ فرمول استوکس. *هـرگاه $\mathbf{F}$ یک میدان برداری از ردهٔ $\mathscr{C}'$ درمجموعهٔ باز $E \subset R^3$ و Φ یک سطح 2 بعدی از ردهٔ $\mathscr{C}''$ در E باشد ، آنگاه*

$$\int_\Phi (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA = \int_{\partial\Phi} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\, ds. \tag{145}$$

برهان . قرارمی‌دهیم $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{F}$. در این‌صورت ، مثل وضعی که در برهان قضیهٔ ۴۳.۱۰ بود ، داریم

$$\omega_{\mathbf{H}} = d\lambda_{\mathbf{F}}. \tag{146}$$

بنابر این،

$$\int_{\Phi} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA = \int_{\Phi} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})\, dA = \int_{\Phi} \omega_{\mathbf{H}}$$
$$= \int_{\Phi} d\lambda_{\mathbf{F}} = \int_{\partial\Phi} \lambda_{\mathbf{F}} = \int_{\partial\Phi} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\, ds.$$

در اینجا از تعریف $\mathbf{H}$ استفاده‌کردیم ،بعد (۱۴۴) را با $\mathbf{H}$ به عوض $\mathbf{F}$ به کار گرفتیم ، سپس (۱۴۶) را اعمال نمودیم ، بعد ، که مرحلهٔ اصلی بود ، قضیهٔ ۳۳۰۱۰ را به کار گرفتیم ،و سرانجام (۱۴۳) را ، که به نحو روشنی از منحنیها به زنجیرهای 1 بعدی تعمیم داده شده بود ، مورد استفاده قرار دادیم .

۵۱۰۱۰ قضیهٔ دیورژانس. *هرگاه* $\mathbf{F}$ *یک میدان‌برداری‌از رده‌ٔ* $\mathscr{C}'$ *درمجموعهٔ باز* $E \subset R^3$*،و* Ω *زیرمجموعهٔ بستهای از* E *باکرانهٔ به طور مثبت جهتدار* $\partial\Omega$ *(بنحوی که در بخش ۳۱۰۱۰ توصیف شد) باشد ، آنگاه*

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dA. \tag{147}$$

برهان. بنابر (۱۲۵) ،

$$d\omega_{\mathbf{F}} = (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dx \wedge dy \wedge dz = (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV.$$

لذا ، به استناد قضیهٔ ۳۳۰۱۰ ،که‌درموردفرم 2 بعدی $\omega_{\mathbf{F}}$ اعمال‌شده،و رابطهٔ (۱۴۴) ،

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \int_{\Omega} d\omega_{\mathbf{F}} = \int_{\partial\Omega} \omega_{\mathbf{F}} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dA.$$

تمرین

۱ . H را یک مجموعهٔ محدب فشرده در R^k با درونی ناتهی بینگارید . فرض کنید $f \in \mathscr{C}(H)$ ، در متمم H قرار دهید $f(\mathbf{x}) = 0$ ، و $\int_H f$ را مثل تعریف ۳۰۱۰ تعریف نمایید . ثابت کنید $\int_H f$ از ترتیبی که با آن k انتگرالگیری صورت می‌گیرد مستقل است.
راهنمایی: f را با توابعی که بر R^k پیوسته‌اند و تکیه‌گاهشان در H است ،بنحوی‌که‌در مثال ۴۰۱۰ شد ، تقریب نمایید .

. به ازای $i = 1, 2, 3, \ldots,$ ، فرض کنید $\varphi_i \in \mathscr{C}(R^1)$ تکیه‌گاه در $(2^{-i}, 2^{1-i})$ داشته باشد ، بطوری که $\int \varphi_i = 1$. قرار دهید

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} [\varphi_i(x) - \varphi_{i+1}(x)]\varphi_i(y) .$$

در این صورت ، f تکیه‌گاه فشرده در R^2 دارد ، f جز در $(0, 0)$ پیوسته است ، و $\int dy \int f(x, y)\, dx = 0$ ولی $\int dx \int f(x, y)\, dy = 1$.
ملاحظه کنید که f در هر همسایگی $(0, 0)$ بی‌کران است .

۳ . (آ) اگر F مثل F بوده در قضیهٔ ۱۰۰۷ باشد ، قرار دهید $\mathbf{A} = \mathbf{F}'(0)$ ، $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$. در این صورت ، $\mathbf{F}_1'(0) = I$. نشان دهید که در یکی از همسایگیهای $\mathbf{0}$ ، به‌ازای نگاشتهای اولیه‌ای چون $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_n$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_n \circ \mathbf{G}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1(\mathbf{x}) .$$

این صورت دیگری از قضیهٔ ۱۰۰۷ را به دست می‌دهد :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(0)\mathbf{G}_n \circ \mathbf{G}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1(\mathbf{x}) .$$

(ب) ثابت کنید نگاشت $(x, y) \to (y, x)$ از R^2 بروی R^2 ، در هر همسایگی مبدأ ترکیبی از دو نگاشت اولیه نیست . (این نشان می‌دهد که ضربه‌های B_i را نمی‌شود از صورت قضیهٔ ۱۰۰۷ حذف کرد .)

۴ . به ازای $(x, y) \in R^2$ تعریف کنید

$$\mathbf{F}(x, y) = (e^x \cos y - 1, e^x \sin y) .$$

ثابت کنید $\mathbf{F} = \mathbf{G}_2 \circ \mathbf{G}_1$ که در آن

$$\mathbf{G}_1(x, y) = (e^x \cos y - 1, y)$$

$$\mathbf{G}_2(u, v) = (u, (1 + u) \tan v)$$

اولیه‌هایی در یکی از همسایگیهای $(0, 0)$ اند .
ژاکوبیهای $\mathbf{G}_1$ و $\mathbf{G}_2$ ، $\mathbf{F}$ را در $(0, 0)$ محاسبه کنید . تعریف کنید

$$\mathbf{H}_2(x, y) = (x, e^x \sin y) ,$$

و

$$\mathbf{H}_1(u, v) = (h(u, v), v)$$

را طوری بیابید که در یکی از همسایگیهای $(0, 0)$ ، $\mathbf{F} = \mathbf{H}_1 \circ \mathbf{H}_2$.

۵ . مشابه قضیهٔ ۱۰۰۸ را که در آن K زیر مجموعهٔ فشرده‌ای از یک فضای متری دلخواه

است تنظیم و اثبات نمایید. (توابع φ_i آمده در برهان قضیهٔ ۸۰۱۰ را تابعهایی از آن نوع که در تمرین ۲۲ فصل ۴ ساخته شد عوض کنید.)

۶ . حاصل قضیهٔ ۸۰۱۰ را با نشان دادن اینکه توابع ψ_i را می‌شود مشتقپذیر، و حتی بی‌نهایت بار مشتقپذیر، کرد قوت بخشید. (از تمرین ۱ فصل ۸ در ساختن توابع کمکی φ_i استفاده نمایید.)

۷ . (آ) نشان دهید که سادک Q^k کوچکترین زیر مجموعهٔ محدب R^k است که حاوی $0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ می‌باشد.

(ب) نشان دهید که نگاشتهای مستوی مجموعه‌های محدب را به مجموعه‌های محدب می‌برند.

۸ . فرض کنید H متوازی الاضلاعی در R^2 باشد که رئوسش $(1, 1)$ ، $(3, 2)$ ، $(4, 5)$ ، و $(2, 4)$ اند. نگاشت مستوی T که $(0, 0)$ را به $(1, 1)$ ، $(1, 0)$ را به $(3, 2)$ ، و $(0, 1)$ را به $(2, 4)$ می‌برد بیابید. نشان دهید که $J_T = 5$. با استفاده از T، انتگرال

$$\alpha = \int_H e^{x-y}\, dx\, dy$$

را به انتگرالی روی I^2 بدل کرده، بدین ترتیب، α را محاسبه نمایید.

۹ . بر مستطیل

$$0 \le r \le a, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$(x, y) = T(r, \theta)$ را با معادلات

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

تعریف کنید. نشان دهید که T این مستطیل را روی قرص بستهٔ D به مرکز $(0, 0)$ و شعاع a می‌نگارد، T درون مستطیل یک به یک است، و $J_T(r, \theta) = r$. چنانچه $f \in \mathscr{C}(D)$ ، فرمول انتگرالگیری در مختصات قطبی را ثابت نمایید:

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^a \int_0^{2\pi} f(T(r, \theta)) r\, dr\, d\theta.$$

راهنمایی: فرض کنید D_0 درون D منهای بازهٔ از $(0, 0)$ تا $(0, a)$ باشد. در وضع فعلی قضیهٔ ۹۰۱۰ در مورد توابع پیوستهٔ f ی به کار می‌رود که تکیه‌گاهشان در D_0 است. برای برداشتن این قید مثل مثال ۴۰۱۰ عمل نمایید.

۱۰. در تمرین ۹ فرض کنید $a \to \infty$ ، و ثابت کنید به ازای توابع پیوستهٔ f که وقتی $|x|+|y| \to \infty$ به قدر کافی سریع نزول می‌کنند

$$\int_{R^2} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(T(r, \theta))r\, dr\, d\theta.$$

(صورت دقیقتر را به دست آورید.) این را در مورد
$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$
به کار برده فرمول (۱۰۱) فصل ۸ را نتیجه بگیرید.

۱۱. $(u, v) = T(s, t)$ را بر نوار $0 < s < \infty, \quad 0 < t < 1$
با فرض $u = s - st$ و $v = st$ تعریف کنید. نشان دهید که T نگاشتی 1-1 از این نوار بروی ربع مثبت Q در R^2 است. نشان دهید که $J_T(s, t) = s$.
به ازای $x > 0, y > 0$

$$u^{x-1}e^{-u}v^{y-1}e^{-v}$$

را روی Q انتگرالگیری‌کنید، ازقضیهٔ ۱۰.۹ استفاده کرده انتگرال را به انتگرالی روی نوار بدل نمایید، و از این راه فرمول (۹۶) فصل ۸ را نتیجه بگیرید.
(برای این‌کاربرد، قضیهٔ ۱۰.۹ باید طوری تعمیم یابد که انتگرالهای مجازی خاصی را در بر گیرد. این تعمیم را به دست آورید.)

۱۲. فرض کنید I^k مجموعهٔ تمام $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in R^k$ هایی باشدکه‌به‌ازای‌هر i ، $0 \le u_i \le 1$ ؛ Q^k را مجموعهٔ تمام $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k$ هایی بینگارید که $x_i \ge 0$ و $\Sigma x_i \le 1$. (I^k مکعب یکه و Q^k سادک متعارف در R^k است.) $\mathbf{x} = T(\mathbf{u})$ را با

$$\begin{aligned}
x_1 &= u_1 \\
x_2 &= (1 - u_1)u_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_k &= (1 - u_1) \cdots (1 - u_{k-1})u_k
\end{aligned}$$

تعریف کنید. نشان دهید که

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - u_i).$$

نشان دهید که T ، I^k را بروی Q^k می‌نگارد، T درون I^k یک‌به‌یک‌است، و معکوسش S درون Q^k با $u_1 = x_1$ و به ازای $i = 2, \ldots, k$ ، با

$$u_i = \frac{x_i}{1 - x_1 - \cdots - x_{i-1}}$$

تعریف می‌شود . نشان دهید که

$$J_T(\mathbf{u}) = (1 - u_1)^{k-1}(1 - u_2)^{k-2} \cdots (1 - u_{k-1})$$

و

$$J_S(\mathbf{x}) = [(1 - x_1)(1 - x_1 - x_2) \cdots (1 - x_1 - \cdots - x_{k-1})]^{-1}.$$

۱۳ . فرض کنید $r_1, \ldots, r_k$ اعدادی صحیح و نامنفی باشند ، ثابت کنید که

$$\int_{Q^k} x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k}\, dx = \frac{r_1! \cdots r_k!}{(k + r_1 + \cdots + r_k)!}.$$

راهنمایی : از تمرین ۱۲ وقضا ۹۰۱۰ و۲۰۰۸ استفاده نمایید .
توجه کنید که حالت خاص $r_1 = \cdots = r_k = 0$ نشان می‌دهد که حجم Q^k مساوی $1/k!$ است .

۱۴ . فرمول (۴۶) را ثابت کنید .

۱۵ . هرگاه ω و λ بترتیب فرمهایی k بعدی و m بعدی باشند ، ثابت کنید که

$$\omega \wedge \lambda = (-1)^{km} \lambda \wedge \omega.$$

۱۶ . هرگاه $k \geq 2$ و $\sigma = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k]$ یک سادک k بعدی مستوی جهتدار باشد ، مستقیما " از تعریف عملگر کرانه‌ای ∂ ثابت کنید که $\partial^2 \sigma = 0$. از این نتیجه بگیرید که به ازای هر زنجیر Ψ ، $\partial^2 \Psi = 0$.

راهنمایی : بخاطر جهت ، ابتدا این کار را برای $k = 2, k = 3$ انجام دهید . درحالت کلی ، اگر $i < j$ ، فرض کنید σ_{ij} سادک $(k-2)$ بعدی باشد که با حذف $\mathbf{p}_i$ و $\mathbf{p}_j$ از σ به دست می‌آید . نشان دهید که هر σ_{ij} دوبار ، با علامت مخالف ، در $\partial^2 \sigma$ ظاهر می‌شود .

۱۷ . قرار می‌دهیم $J^2 = \tau_1 + \tau_2$ که در آن

$$\tau_1 = [0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2], \qquad \tau_2 = -[0, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1].$$

توضیح دهید چرا مربع یکه به طور مثبت جهتدار در R^2 ... سطوی ... نشان دهید ... ∂J^2 مجموع 4 سادک 1 بعدی مستوی جهتدار است . این سادکها را پیدا کنید . $\partial(\tau_1 - \tau_2)$ چیست ؟

۱۸ . سادک 3 بعدی مستوی جهتدار

$$\sigma_1 = [0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3]$$

درR^3 را در نظر بگیرید . نشان دهید که σ_1 (ملحوظ به شکل یک تبدیل‌خطی) دارای دترمینان یک است . لذا ، σ_1 به طور مثبت جهتدار خواهد بود .
فرض کنید $\sigma_2, \ldots, \sigma_6$ پنج‌سادک 3 بعدی‌جهتدار دیگر باشد که به این طریق به دست می‌آیند : پنج جایگشت (i_1, i_2, i_3) از $(1, 2, 3)$ ، متمایز از $(1, 2, 3)$ ، وجود دارد . به هر (i_1, i_2, i_3) سادک

$$s(i_1, i_2, i_3)[0, \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_1} + \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_1} + \mathbf{e}_{i_2} + \mathbf{e}_{i_3}]$$

را مربوطمی‌کنیم که‌درآن s علامتی‌است‌که‌درتعریف‌دترمینان ظاهرمی‌شود . (به‌این طریق بود که در تمرین ۱۷، τ_2 از τ_1 به دست آمد .)
نشان دهید که $\sigma_2, \ldots, \sigma_6$ به طور مثبت جهتدار اند .
قرار دهید $J^3 = \sigma_1 + \cdots + \sigma_6$ دراین‌صورت ، J^3 را می‌توان‌مکعب یکه‌ٔ به طور مثبت‌جهتدار در R^3 خواند .
نشان دهیدکه ∂J^3 مجموع 12 سادک 2 بعدی مستوی جهتدار است . (این 12 مثلث سطح مکعب یکه‌ٔ J^3 را می‌پوشانند .)
نشان دهید که $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ در برد σ_1 است اگر و فقط اگر $0 \le x_3 \le x_2 \le x_1 \le 1$.
نشان دهید که بردهای $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ درونهای ازهم جدا دارند ، و اجتماع آنها J^3 را می‌پوشاند . (قس. تمرین ۱۳ ؛ توجه کنید که $6 = 3!$)

۱۹ . فرض کنید J^2 و J^3 همانهای بوده در تمرین ۱۷ و ۱۸ باشند . تعریف کنید

$$\begin{aligned} B_{01}(u, v) &= (0, u, v), & B_{11}(u, v) &= (1, u, v), \\ B_{02}(u, v) &= (u, 0, v), & B_{12}(u, v) &= (u, 1, v), \\ B_{03}(u, v) &= (u, v, 0), & B_{13}(u, v) &= (u, v, 1). \end{aligned}$$

اینها مستوی هستند و R^2 را بتوی R^3 می‌نگارند .
به ازای $r = 0, 1$ و $i = 1, 2, 3$ قراردهید $\beta_{ri} = B_{ri}(J^2)$. هر β_{ri} یک‌زنجیر 2 بعدی جهتدار مستوی است . (ر.ک. بخش ۱۰ . ۳۰ .) تحقیق کنید که

$$\partial J^3 = \sum_{i=1}^{3} (-1)^i (\beta_{0i} - \beta_{1i}),$$

که با تمرین ۱۸ مطابقت دارد .

۲۰ . شرایطی بیان کنید که فرمول

$$\int_{\Phi} f\, d\omega = \int_{\partial\Phi} f\omega - \int_{\Phi} (df) \wedge \omega$$

تحت آنها معتبر باشد ، و نشان دهید که این فرمول انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء را تعمیم می‌دهد .

راهنمایی : $d(f\omega) = (df) \wedge \omega + f\, d\omega$.

۲۱ . مثل مثال ۳۶۰۱۰، فرم 1 بعدی

$$\eta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

را در $R^2 - \{0\}$ در نظر بگیرید .

(آ) محاسباتی انجام دهیدکه به فرمول(۱۱۳)ختم شود ، و ثابت کنید که $d\eta = 0$.

(ب) فرض‌کنید به‌ازای r ی بزرگتراز 0 ، $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$ ، و Γ را یک $\mathscr{C}''$-منحنی‌در $R^2 - \{0\}$ با بازهٔ‌پارامتری $[0, 2\pi]$ بینگارید ،بااین‌شرط که $\Gamma(0) = \Gamma(2\pi)$ ، بطوری‌که‌بازه‌های $[\gamma(t)\ \Gamma(t)]$ به‌ازای‌هر $t \in [0, 2\pi]$ شامل $\mathbf{0}$ نباشند .ثابت‌کنید

$$\int_\Gamma \eta = 2\pi.$$

راهنمایی : به ازای $0 \le t \le 2\pi, 0 \le u \le 1$ تعریف کنید

$$\Phi(t, u) = (1-u)\,\Gamma(t) + u\gamma(t).$$

دراین‌صورت ، Φ یک‌سطح2 بعدی‌در $R^2 - \{0\}$ است‌که‌قلمروپارامتری‌آن‌مستطیل فوق‌الذکر می‌باشد . بخاطر حذفیات (مثل مثال ۳۲۰۱۰)،

$$\partial\Phi = \Gamma - \gamma .$$

قضیهٔ استوکس را به کاربرده نتیجه بگیرید که ، بدلیل $d\eta = 0$ ،

$$\int_\Gamma \eta = \int_\gamma \eta .$$

(پ) $\Gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$ را ،که‌درآن $a > 0, b > 0$ ثابت‌اند ،اختیارکنید .قسمت (ب) را به کار برده نشان دهید که

$$\int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt = 2\pi .$$

(ت) نشان دهید که در هر مجموعهٔ باز محدبی که در آن $x \neq 0$

$$\eta = d\left(\arctan\frac{y}{x}\right).$$

و نیز در هر مجموعهٔ باز محدبی که درآن $y \neq 0$

$$\eta = d\left(-\arctan\frac{x}{y}\right),$$

توضیح دهید چرا این مطلب نماد $\eta = d\theta$ را، علیرغم اینکه η در $R^2 - \{0\}$ کامل نیست، توجیه می‌کند.

(ث) نشان دهید که (ب) را می‌توان از (ت) نتیجه گرفت.

(ج) اگر Γ یک $\mathscr{C}'$ منحنی دلخواه در $R^2 - \{0\}$ باشد، ثابت کنید

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \eta = \mathrm{Ind}(\Gamma)\cdot$$

(برای تعریف شاخص یک منحنی، ر.ک. تمرین ۲۳ فصل ۸.)

۲۲. مثل مثال ۱۰.۳۷، ζ را در $R^3 - \{0\}$ با

$$\zeta = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{r^3}$$

که در آن $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ و D مستطیلی است که با $0 \le u \le \pi$ و $0 \le v \le 2\pi$ داده می‌شود، تعریف کنید، و Σ را سطح 2 بعدیی در R^3، با قلمرو پارامتری D، بینگارید که با

$$x = \sin u \cos v, \qquad y = \sin u \sin v, \qquad z = \cos u$$

مشخص می‌شود.

(آ) ثابت کنید $d\zeta = 0$ در $R^3 - \{0\}$.

(ب) فرض کنید S تحدید Σ به قلمرو پارامتری $E \subset D$ باشد. ثابت کنید

$$\int_S \zeta = \int_E \sin u \, du \, dv = A(S)$$

که در آن A، همچون بخش ۱۰.۴۳، نشانگر مساحت است. توجه کنید که این رابطهٔ (۱۱۵) را به عنوان حالتی خاص در بردارد.

(پ) g, h_1, h_2, h_3 را $\mathscr{C}''$ توابعی بر $[0, 1]$ بینگارید که $g > 0$. فرض کنید $(x, y, z) = \Phi(s, t)$ سطح 2 بعدی Φ، با قلمرو پارامتری I^2، را با

$$x = g(t)h_1(s), \qquad y = g(t)h_2(s), \qquad z = g(t)h_3(s)$$

تعریف می‌کند. مستقیماً از (۳۵) ثابت کنید که

$$\int_\Phi \zeta = 0\cdot$$

به شکل برد Φ توجه نمایید: به ازای s ثابت، $\Phi(s, t)$ روی یک بازه برخطی ماربر 0 تغییر می‌کند. لذا، برد Φ در یک "مخروط" با رأس در مبداء جای خواهد داشت.

(ت) E را یک مستطیل بسته در D بینگارید که اضلاعش موازی اضلاع D است. فرض کنید $f \in \mathscr{C}''(D), f > 0$. همچنین، Ω سطح 2 بعدیی با قلمرو پارامتری E باشد که با

$$\Omega(u, v) = f(u, v)\,\Sigma(u, v)$$

تعریف می‌شود . S را مثل S (ب) تعریف کرده ثابت کنید

$$\int_\Omega \zeta = \int_S \zeta = A(S).$$

(چون S "تصویرشعاعی" Ω بتوی کرهٔ یکه است ،این نتیجه خواندن $\int_\Omega \zeta$ را با نام "زاویهٔ فضایی" مقابل برد Ω در مبدأ توجیه می‌نماید .)

راهنمایی : سطح 3 بعدی Ψ داده شده با

$$\Psi(t, u, v) = [1 - t + tf(u, v)]\,\Sigma(u, v)$$

را ، که درآن $(u, v) \in E$ و $0 \le t \le 1$، در نظر می‌گیریم . به ازای v ی ثابت ، نگاشت $(t, u) \to \Psi(t, u, v)$ یک سطح 2 بعدی مانند Φ است که می‌توان (پ) را در موردش اعمال کرد و نشان داد که $\int_\Phi \zeta = 0$. همین وضع برای وقتی u ثابت باشد برقرار است . بنابر (آ) و قضیهٔ استوکس

$$\int_{\partial\Psi} \zeta = \int_\Psi d\zeta = 0.$$

(ث) قرار دهید $\lambda = -(z/r)\eta$ که درآن ، مثل تمرین ۲۱ ،

$$\eta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

دراین‌صورت ، λ یک فرم 1 بعدی درمجموعهٔ باز $V \subset R^3$ است که درآن $x^2 + y^2 > 0$. با اثبات اینکه $\zeta = d\lambda$ نشان دهید که ζ در E **کامل** است .

(ج) (ت) را از (ث) ، بدون استفاده از (پ) ، نتیجه بگیرید .

راهنمایی : برای شروع ، فرض می‌کنیم $0 < u < \pi$ بر E . بنابر (ث)

$$\int_\Omega \zeta = \int_{\partial\Omega} \lambda \quad \text{و} \quad \int_S \zeta = \int_{\partial S} \lambda.$$

بااستفاده‌از قسمت (ت) تمرین ۲۱ و توجه‌به‌اینکه z/r در $\Sigma(u, v)$ و در $\Omega(u, v)$ یکی است ، نشان دهید که دو انتگرال λ با هم برابرند .

(چ) آیا ζ در متمم هر خط مار بر مبداء کامل است ؟

۲۳ . n را ثابت بگیرید . به‌ازای $1 \le k \le n$ تعریف کنید $r_k = (x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{1/2}$ فرض‌کنید E_k مجموعهٔ تمام $\mathbf{x} \in R^n$ هایی باشد که درآنها $r_k > 0$ ، و ω_k را فرم $(k-1)$ بعدی تعریف شده در E_k با

$$\omega_k = (r_k)^{-k} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} x_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_k$$

بینگارید .

توجه کنید که ، با اصطلاحات تمرینهای ۲۱ و ۲۲ $\omega_2 = \eta, \omega_3 = \zeta$. همچنین ، توجه کنید که

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = R^n - \{0\}.$$

(آ) ثابت کنید که در E_k ، $d\omega_k = 0$.

(ب) با نشان دادن اینکه

$$\omega_k = d(f_k \omega_{k-1}) = (df_k) \wedge \omega_{k-1}$$

که در آن $f_k(\mathbf{x}) = (-1)^k g_k(x_k/r_k)$ و

$$g_k(t) = \int_{-1}^{t} (1-s^2)^{(k-3)/2} \, ds \qquad (-1 < t < 1)،$$

ثابت کنید ω_k ، به ازای $k = 2, \ldots, n$، در E_{k-1} کامل است .

راهنمایی: f_k در معادلات دیفرانسیل

$$\mathbf{x} \cdot (\nabla f_k)(\mathbf{x}) = 0$$

و

$$(D_k f_k)(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^k (r_{k-1})^{k-1}}{(r_k)^k}$$

صدق می‌کند .

(پ) آیا ω_n در E_n کامل است ؟

(ت) توجه کنیدکه (ب) تعمیم قسمت (ث) تمرین ۲۲ است . سعی کنید چند تا از احکام دیگر تمرینهای ۲۱ و ۲۲ را در مورد ω_n ، به ازای n دلخواه ، تعمیم دهید .

۲۴ . فرض کنید $\omega = \Sigma a_i(\mathbf{x}) \, dx_i$ یک فرم 1-بعدی‌ازرده‌ٔ $\mathscr{C}''$ درمجموعه‌ٔ بازومحدب $E \subset R^n$ باشد. بپذیرید که $d\omega = 0$ و ، با تکمیل شرح مختصر زیر ، ثابت کنید ω در E کامل است .

$\mathbf{p} \in E$ را ثابت بگیرید . تعریف کنید

$$f(\mathbf{x}) = \int_{[\mathbf{p}, \mathbf{x}]} \omega \qquad (\mathbf{x} \in E).$$

قضیه‌ٔ استوکس را درمورد سادکهای 2-بعدی جهتدار مستوی $[\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{y}]$ در E به‌کار برید . نتیجه بگیرید که به ازای $\mathbf{x} \in E, \mathbf{y} \in E$

$$f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)\int_0^1 a_i((1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y})\,dt\text{،}$$

لذا ، $(D_i f)(\mathbf{x})=a_i(\mathbf{x})$.

۲۵ . فرض کنید ω یک‌فرم 1 بعدی درمجموعهٔ باز $E\subset R^n$ باشد بطوری‌که به ازای هر منحنی بستهٔ γ در E ، از ردهٔ $\mathscr{C}'$ ،

$$\int_\gamma \omega=0\text{.}$$

باتقلید ازبخشی از آنچه مختصرا " در تمرین ۲۴ گفته شد ، ثابت کنید ω در E کامل است .

۲۶ . فرض کنید ω یک فرم 1 بعدی در $R^3-\{\mathbf{0}\}$ از ردهٔ $\mathscr{C}'$ باشدو $d\omega=0$. ثابت کنید ω در $R^3-\{\mathbf{0}\}$ کامل است .

راهنمایی : هرمنحنی‌به طورپیوسته‌مشتقپذیرو بسته‌در $R^3-\{\mathbf{0}\}$ کرانهٔ‌یک سطح 2 بعدی در $R^3-\{\mathbf{0}\}$ است . قضیهٔ استوکس و تمرین ۲۵ را به کار برید .

۲۷ . فرض کنید E یک حجرهٔ 3 بعدی باز در R^3 با اضلاعی موازی محورهای مختصات باشد . فرض کنید $(a,b,c)\in E$ و ، به ازای $i=1,2,3$ ، $f_i\in\mathscr{C}'(E)$ ،

$$\omega=f_1\,dy\wedge dz+f_2\,dz\wedge dx+f_3\,dx\wedge dy,$$

ونیز فرض کنید $d\omega=0$ در E . تعریف کنید

$$\lambda=g_1\,dx+g_2\,dy$$

که در آن به ازای $(x,y,z)\in E$

$$g_1(x,y,z)=\int_c^z f_2(x,y,s)\,ds-\int_b^y f_3(x,t,c)\,dt$$

$$g_2(x,y,z)=-\int_c^z f_1(x,y,s)\,ds.$$

ثابت کنید $d\lambda=\omega$ در E .

این انتگرالها را وقتی $\omega=\zeta$ حساب کرده بدین ترتیب شکل λ را که در قسمت (ث) تمرین ۲۲ ظاهر شده پیدا نمایید .

۲۸ . $b>a>0$ را ثابت بگیرید و ، به ازای $a\le r\le b,\ 0\le\theta\le 2\pi$ ، تعریف کنید

$$\Phi(r,\theta)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\text{.}$$

(برد Φ یک طوق در R^2 است .) قرار دهید $\omega=x^3\,dy$ ، و هر دوی

$$\int_{\partial\Phi}\omega \quad و \quad \int_{\Phi}d\omega$$

را برای تحقیق در برابر بودن نشان محاسبه نمایید .

۲۹ . وجود تابع α با خواص لازم در برهان قضیهٔ ۱۰ ۰ ۳۸ را اثبات ، وثابت کنید تابع حاصل F از ردهٔ $\mathscr{C}'$ است . (هر دو حکم در صورتی که E یک حجرهٔ باز یا یک گوی باز باشد بدیهی است ، زیرا در این صورت α را می‌توان ثابت گرفت . ر.ک . قضیهٔ ۹ ۰ ۴۲ .)

۳۰ . اگر $\mathbf{N}$ بردار داده شده با (۱۳۵) باشد ، ثابت کنید

$$\det\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\\ \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\end{bmatrix}=|\mathbf{N}|^2.$$

همچنین ، صحت معادلهٔ (۱۳۷) را تحقیق نمایید .

۳۱ . فرض کنید $E\subset R^3$ باز باشد ، $g\in\mathscr{C}''(E)$ ، $h\in\mathscr{C}''(E)$ ، و میدان برداری

$$\mathbf{F}=g\,\nabla h$$

را در نظر می‌گیریم .

(آ) ثابت کنید

$$\nabla\cdot F=g\,\nabla^2h+(\nabla g)\cdot(\nabla h)$$

که در آن $\nabla^2h=\nabla\cdot(\nabla h)=\Sigma\partial^2h/\partial x_i^2$ "لاپلاسین" h نام دارد .

(ب) هرگاه Ω یک زیرمجموعهٔ بستهٔ E با کرانهٔ به طور مثبت جهتدار $\partial\Omega$ باشد (مثل قضیهٔ ۱۰ ۰ ۵۱) ، ثابت کنید

$$\int_\Omega[g\,\nabla^2h+(\nabla g)\cdot(\nabla h)]dV=\int_{\partial\Omega}g\frac{\partial h}{\partial n}dA$$

که در آن (همانطور که رسم است) $\partial h/\partial n$ را به‌جای $(\nabla h)\cdot\mathbf{n}$ نوشته‌ایم . (لذا ، $\partial h/\partial n$ مشتق جهتی h در جهت قائم برونسو به $\partial\Omega$ ، به نام **مشتق قائم** h ، می‌باشد.) g و h را با هم عوض کرده فرمول حاصل را از اولی کم کنید تا

$$\int_\Omega(g\,\nabla^2h-h\,\nabla^2g)\,dV=\int_{\partial\Omega}\left(g\frac{\partial h}{\partial n}-h\frac{\partial g}{\partial n}\right)dA$$

حاصل شود .

این دو فرمول را معمولا " ***اتحادهای گرین*** " می‌خوانند .

(پ) فرض کنید h در E **توافقی** باشد ؛ این‌یعنی که $\nabla^2 h = 0$، g را مساوی یک اختیار کرده نتیجه بگیرید که

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial n} dA = 0 .$$

g رابرابر h اختیارکرده‌نتیجه بگیرید که $h=0$ در Ω هرگاه $h=0$ بر $\partial\Omega$.

(ت) نشان دهید که اتحادهای گرین در R^2 نیز معتبرند .

۳۲ . δ را بین 0 و 1 ثابت بگیرید . فرض کنید D مجموعهٔ جمیع $(\theta, t) \in R^2$هایی باشد که $0 \leq \theta \leq \pi$ و $-\delta \leq t \leq \delta$.Φ راسطح 2 بعدیی در R^3 ،با قلمروپارامتری D ، بینگارید که با

$$\begin{aligned} x &= (1 - t \sin \theta) \cos 2\theta \\ y &= (1 - t \sin \theta) \sin 2\theta \\ z &= t \cos \theta , \end{aligned}$$

که در آنها $(x, y, z) = \Phi(\theta, t)$، مشخص می‌شود .توجه‌کنیدکه $\Phi(\pi, t) = \Phi(0, -t)$ و Φ بر مابقی D یک به یک است .

برد $M = \Phi(D)$ ی Φ به **نوار موبیوس**[1] معروف است . این ساده‌ترین نمونهٔ یک سطح جهت ناپذیر می‌باشد .

احکام مختلفی را که در توضیحات زیر آمده‌اند اثبات کنید : قرار دهید

$\mathbf{p}_1 = (0, -\delta)$, $\mathbf{p}_2 = (\pi, -\delta)$, $\mathbf{p}_3 = (\pi, \delta)$, $\mathbf{p}_4 = (0, \delta)$, $\mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_1$ ، همچنین ،

$\gamma_i = [\mathbf{p}_i , \mathbf{p}_{i+1}]$ ، $i = 1, \ldots, 4$ ، و فرض کنید $\Gamma_i = \Phi \circ \gamma_i$ در این صورت ،

$$\partial\Phi = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 .$$

قرار می‌دهیم $\mathbf{a} = (1, 0, -\delta)$, $\mathbf{b} = (1, 0, \delta)$. در این صورت ،

$$\Phi(\mathbf{p}_1) = \Phi(\mathbf{p}_3) = \mathbf{a}, \qquad \Phi(\mathbf{p}_2) = \Phi(\mathbf{p}_4) = \mathbf{b}$$

و $\partial\Phi$ را می‌توان به شکل زیر توصیف کرد :

Γ مارپیچ‌واراز $\mathbf{a}$ به $\mathbf{b}$ بالامی‌رود ؛تصویرش‌درصفحهٔ (x, y) دارای‌عددگردشی $+1$ حول مبداء است . (ر.ک. تمرین ۲۳ ، فصل ۸)

$\Gamma_2 = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$.

1. *Möbius*

Γ_3 مارپیچوار از a به b بالا می‌رود ؛ تصویرش در صفحهٔ (x, y) دارای‌عدد گردشی $1-$ حول مبداء می‌باشد .

$\Gamma_4 = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$.

لذا $\partial\Phi = \Gamma_1 + \Gamma_3 + 2\Gamma_2$.

اگر در امتداد Γ_1 از a به b برویم ودرامتداد "یال" M ادامه‌داده تا به a بازگردیم ، منحنی پیموده شده

$$\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_3$$

است ، که می‌توان آن را روی بازهٔ پارامتری $[0, 2\pi]$ با معادلات

$$\begin{aligned} x &= (1 + \delta \sin \theta) \cos 2\theta \\ y &= (1 + \delta \sin \theta) \sin 2\theta \\ z &= -\delta \cos \theta \end{aligned}$$

نیز نمایش داد .

بایستی تأکید شود که $\Gamma \neq \partial\Phi$: فرض کنید η فرم 1 بعدیی باشد که در تمرینهای ۲۱ و ۲۲ مطرح شد . چون $d\eta = 0$، قضیهٔ استوکس نشان می‌دهد که

$$\int_{\partial\Phi} \eta = 0.$$

اما ، با اینکه Γ کرانهٔ "هندسی" M است ، داریم

$$\int_{\Gamma} \eta = 4\pi.$$

برای احتراز ازاین ابهام ،اغلب فرمول استوکس (قضیهٔ ۵۰۰۱۰) فقط‌برای سطوح جهت‌پذیر Φ بیان می‌شود .

۱۱
نظریهٔ لبگ

هدف در این فصل آن است که مفهومهای اساسی نظریهٔ اندازه و انتگرالگیری لبگ معرفی و، بی‌آنکه خطوط اصلی کار با جزئیات نسبتاً" بدیهی تیره شوند، چند قضیهٔ قطعی در یک محدودهٔ نسبتاً "کلی اثبات گردند. از اینرو، برهانها فقط در بعضی از حالات و آنهم به‌اختصار آمده و برخی از احکام ساده‌تر بی‌برهان ذکر شده‌اند. بهرحال، خوانندهٔ آشنا با فنون به کار رفته در فصلهای پیش یقیناً" در بیان مطالب ذکر نشده مشکل نخواهد داشت.

نظریهٔ انتگرال لبگ را می‌توان به چند طریق عرضه کرد. یکی از این طریقه‌ها دراینجا مطرح خواهد شد. برای طرق دیگر، خواننده را به مقالات تخصصی‌تر در باب انتگرالگیری که در کتابنامه ذکر شده‌اند ارجاع می‌دهیم.

توابع مجموعه‌ای

اگر A و B دو مجموعه‌باشند، برای مجموعهٔ تمام x هایی که $x \in A,\ x \notin B$ می‌نویسیم $A - B$. نماد $A - B$ جزئیت $B \subset A$ را ایجاب نمی‌کند. ما مجموعهٔ تهی را با 0 نشان می‌دهیم، و می‌گوییم A و B ازهم جدا اند در صورتی که $A \cap B = 0$.

۱۱۰۱ تعریف. خانوادهٔ $\mathscr{R}$ از مجموعه‌ها را یک **حلقه** نامیم هرگاه $A \in \mathscr{R}$ و $B \in \mathscr{R}$ ایجاب کنند که

$$A \cup B \in \mathscr{R}, \qquad A - B \in \mathscr{R}. \tag{1}$$

چون $A \cap B = A - (A - B)$ ، در صورت حلقه بودن $\mathscr{R}$ نیز داریم $A \cap B \in \mathscr{R}$.

حلقهٔ $\mathscr{R}$ را یک σ-حلقه خوانیم هرگاه وقتی $A_n \in \mathscr{R}\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ ،

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}. \tag{2}$$

چون

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n),$$

در صورت σ-حلقه بودن $\mathscr{R}$ نیز خواهیم داشت

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}.$$

۲۰۱۱ تعریف. می‌گوییم ϕ یک تابع مجموعه‌ای تعریف شده بر $\mathscr{R}$ است هرگاه ϕ به هر $A \in \mathscr{R}$ عدد $\phi(A)$ از دستگاه وسعت یافتهٔ اعداد حقیقی را نسبت دهد. ϕ **جمعپذیر** است اگر که $A \cap B = 0$ ایجاب کند که

$$\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B) \tag{3}$$

و ϕ **به طور شمارشپذیر جمعپذیر** است هرگاه $A_i \cap A_j = 0\ (i \neq j)$ ایجاب کند که

$$\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n). \tag{4}$$

ما همیشه فرض می‌کنیم برد ϕ شامل هم $+\infty$ و هم $-\infty$ نباشد؛ زیرا، در غیر این صورت، طرف راست (۳) بی‌معنی می‌شد. همچنین، توابع مجموعه‌ایی را که مقدارشان فقط $+\infty$ یا $-\infty$ است مستثنی می‌نماییم.

جالب است توجه کنیم که سمت چپ (۴) از ترتیبی که با آن A_n ها آرایش یافته‌اند مستقل است. از اینرو، قضیهٔ تجدید آرایش نشان خواهد داد که طرف راست (۴) در صورت همگرا بودن به طور مطلق همگراست؛ در صورت همگرا نبودن، مجموعهای جزئی به $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهند کرد.

در حالت جمعپذیر بودن ϕ، خواص زیر بسهولت قابل تحقیق‌اند:

$$\phi(0) = 0; \tag{5}$$

$$\phi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \phi(A_1) + \cdots + \phi(A_n) \tag{6}$$

در صورتی که اگر $i \neq j$، $A_i \cap A_j = 0$؛

$$\phi(A_1 \cup A_2) + \phi(A_1 \cap A_2) = \phi(A_1) + \phi(A_2); \tag{7}$$

هرگاه به ازای هر A، $\phi(A) \geq 0$، و $A_1 \subset A_2$ آنگاه

$$\phi(A_1) \leq \phi(A_2). \tag{8}$$

بخاطر (۸) است که اغلب توابع مجموعه‌ای جمعپذیر نامنفی یکنوا خوانده می‌شوند.

هرگاه $B \subset A$ و $|\phi(B)| < +\infty$،

$$\phi(A - B) = \phi(A) - \phi(B). \tag{9}$$

۳۰۱۱ قضیه. فرض کنیم ϕ بر حلقهٔ $\mathscr{R}$ به طور شمارشپذیر جمعپذیر باشد. همچنین، $A_n \in \mathscr{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$، $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$، $A \in \mathscr{R}$، و

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

در این صورت، وقتی $n \to \infty$،

$$\phi(A_n) \to \phi(A).$$

برهان. قرار می‌دهیم $B_1 = A_1$ و

$$B_n = A_n - A_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

پس، به ازای $i \neq j$، $B_i \cap B_j = 0$، $A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$، و $A = \bigcup B_n$. درنتیجه،

$$\phi(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \phi(B_i).$$

و

$$\phi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(B_i).$$

ساختن اندازهٔ لبگ

۴۰۱۱ تعریف. فرض کنیم R^p فضای اقلیدسی p بعدی باشد. منظور از **بازه** در R^p یعنی مجموعهٔ نقاطی چون $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$ که

$$a_i \le x_i \le b_i \qquad (i = 1, \ldots, p), \tag{10}$$

و یا مجموعهٔ نقاطی که با (۱۰) که در آن بعضی یا تمام علامات $\le$ با $<$ عوض شده مشخص می‌شود. این امکان را که به ازای هر مقدار i، $a_i = b_i$ مردود نمی‌دانیم؛ بویژه، مجموعهٔ تهی را جزو بازه‌ها به حساب می‌آوریم.

هرگاه A اجتماع تعدادی متناهی بازه باشد، A را یک **مجموعهٔ مقدماتی** خواهیم نامید.

چنانچه I یک بازه‌باشد، بی‌توجه‌به امکان تساوی در هر یک از نامساویهای (۱۰)، تعریف می‌کنیم

$$m(I) = \prod_{i=1}^{p} (b_i - a_i).$$

هرگاه $A = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ و این بازه‌ها دوبدو از هم جدا باشند، قرار می‌دهیم

$$m(A) = m(I_1) + \cdots + m(I_n). \tag{11}$$

فرض کنیم $\mathscr{E}$ خانوادهٔ تمام زیرمجموعه‌های مقدماتی R^p باشد.

در این مرحله باید خواص زیر تحقیق شوند:

(12) $\mathscr{E}$ یک حلقه است، اما یک σ_حلقه نیست؛

(13) هرگاه $A \in \mathscr{E}$، A اجتماع تعدادی متناهی بازهٔ از هم جدا است؛

(14) هرگاه $A \in \mathscr{E}$، $m(A)$ به وسیلهٔ (۱۱) کاملا" تعریف می‌شود؛ یعنی، اگر دو تجزیهٔ A به بازه‌های از هم جدا به کار روند، هر دو یک مقدار برای $m(A)$ به دست می‌دهند؛

(15) m بر $\mathscr{E}$ جمعپذیر است.

توجه کنید که اگر $p = 1, 2, 3$، m بترتیب طول، مساحت، و حجم خواهد بود.

۵۰۱۱ تعریف. تابع مجموعه‌ای جمعپذیر نامنفی ϕ تعریف شده بر $\mathscr{E}$ را **منتظم** نامیم اگر که مطلب زیر درست باشد: به ازای هر $A \in \mathscr{E}$ و هر $\varepsilon > 0$ مجموعه‌هایی چون $F \in \mathscr{E}$ و $G \in \mathscr{E}$ موجود باشند بطوری که F بسته باشد، G باز باشد، $F \subset A \subset G$، و

$$\phi(G) - \varepsilon \le \phi(A) \le \phi(F) + \varepsilon. \tag{16}$$

۶۰۱۱ چند مثال

(آ) *تابع مجموعه‌ای m منتظم است*

واضح است که اگر A یک بازه باشد، شرطهای تعریف ۵۰۱۱ برقرارند. حالت کلی از

(۱۳) نتیجه خواهد شد .

(ب) R^p را مساوی R^1 گرفته ،فرض می‌کنیم α تابعی‌صعودی باشدکه‌به ازای‌هر x حقیقی تعریف شده است . قرار می‌دهیم

$$\mu([a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a-),$$
$$\mu([a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a-),$$
$$\mu((a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a+),$$
$$\mu((a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a+).$$

در اینجا $[a, b)$مجموعهٔ $a \leq x < b$است ،وازاین‌قبیل .این‌حالات‌باید بخاطر ناپیوستگیهای احتمالی α تمیز داده شوند .اگر μ برای مجموعه‌های مقدماتی به صورت (۱۱) تعریف شده باشد ، μ بر $\mathscr{E}$ منتظم است . اثباتش درست مثل اثبات (آ) خواهد بود .

هدف بعدی‌ما آن است که نشان دهیم هر تابع مجموعه‌ای منتظم بر $\mathscr{E}$ را می‌توان به یک تابع مجموعه‌ای به‌طور شمارشپذیر جمعپذیر بر یک σـ حلقه که‌شامل $\mathscr{E}$ است تعمیم داد .

۷۰۱۱ تعریف . فرض کنیم μ بر $\mathscr{E}$ جمعپذیر ، منتظم ، نامنفی ، و متناهی باشد . پوششهای شمارشپذیر مجموعهٔ دلخواه $E \subset R^p$ مرکب از مجموعه‌های مقدماتی باز A_n را در نظر می‌گیریم :

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

تعریف می‌کنیم

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n); \tag{17}$$

inf روی تمام پوششهای شمارشپذیر E مرکب از مجموعه‌های مقدماتی باز گرفته می‌شود .
$\mu^*(E)$ **اندازهٔ خارجی** E متناظر μ نامیده می‌شود .

واضح است که به ازای هر E، $\mu^*(E) \geq 0$ و ، اگر $E_1 \subset E_2$،

$$\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2). \tag{18}$$

۸۰۱۱ قضیه

(آ) **به ازای هر** $A \in \mathscr{E}$ ، $\mu^*(A) = \mu(A)$.

(ب) **هرگاه** $E = \bigcup_{1}^{\infty} E_n$، **آنگاه**

$$\mu^*(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n). \tag{19}$$

توجه کنید که (آ) این‌طور می‌گوید که μ^* تعمیم μ از $\mathscr{E}$ به‌خانوادهٔ **تمام** زیرمجموعه‌های R^p است. خاصیت (۱۹) را خاصیت **زیرجمعپذیری** می‌نامند.

برهان. $A \in \mathscr{E}$ و $\varepsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم.

منتظم بودن μ نشان می‌دهد که A در یک مجموعهٔ مقدماتی باز مانند G قرار دارد بطوری که $\mu(G) \le \mu(A) + \varepsilon$. چون $\mu^*(A) \le \mu(G)$ و چون ε دلخواه بود، خواهیم داشت

$$\mu^*(A) \le \mu(A). \tag{20}$$

تعریف μ^* نشان می‌دهد که دنباله‌ای مانند $\{A_n\}$ از مجموعه‌های مقدماتی باز وجود دارد که اجتماعشان شامل A است و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu^*(A) + \varepsilon.$$

منتظم بودن μ نشان می‌دهد که A شامل مجموعهٔ مقدماتی بسته‌ای مثل F است بطوری که $\mu(F) \ge \mu(A) - \varepsilon$. و چون F فشرده است، به ازای N ی داریم

$$F \subset A_1 \cup \cdots \cup A_N.$$

لذا،

$$\mu(A) \le \mu(F) + \varepsilon \le \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_N) + \varepsilon \le \sum_{1}^{N} \mu(A_n) + \varepsilon \le \mu^*(A) + 2\varepsilon.$$

این همراه با (۲۰) قسمت (آ) را ثابت می‌کند.

حال فرض می‌کنیم $E = \bigcup E_n$ و این‌طور می‌انگاریم که به ازای هر n، $\mu^*(E_n) < +\infty$. به ازای $\varepsilon > 0$ معلوم، پوششهایی مثل $\{A_{nk}\}$، $k = 1, 2, 3, \dots$، از E_n مرکب از مجموعه‌های مقدماتی باز وجود دارند بطوری که

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \le \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon. \tag{21}$$

پس

$$\mu^*(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

و (۱۹) نتیجه خواهد شد. البته، درحالت استثنایی، یعنی اگر به ازای n ای، $\mu^*(E_n) = +\infty$، (۱۹) بدیهی خواهد بود.

۹۰۱۱ تعریف. به ازای هر $A \subset R^p$ و $B \subset R^p$ تعریف می‌کنیم

$$S(A, B) = (A - B) \cup (B - A), \tag{22}$$

$$d(A, B) = \mu^*(S(A, B)). \tag{23}$$

هرگاه $\lim_{n \to \infty} d(A, A_n) = 0$، می‌نویسیم

$$A_n \to A.$$

اگر دنباله‌ای چون $\{A_n\}$ از مجموعه‌های مقدماتی باشد بطوری که $A_n \to A$، می‌گوییم A به‌طور متناهی μ-اندازه‌پذیر است و می‌نویسیم $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$.

هرگاه A اجتماع گردآیه‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های به‌طور متناهی μ-اندازه‌پذیر باشد، می‌گوییم A، μ-اندازه‌پذیر است و می‌نویسیم $A \in \mathfrak{M}(\mu)$.

$S(A, B)$ "تفاضل متقارن" A و B نام دارد. خواهیم دید که $d(A, B)$ اصولاً " یک تابع فاصله است.

قضیهٔ زیر ما را به تعمیم مورد نظر μ می‌رساند.

۱۰۰۱۱ قضیه. $\mathfrak{M}(\mu)$ یک σحلقه و μ^* بر $\mathfrak{M}(\mu)$ *به طور شمارشپذیر جمعپذیر است.*

قبل از اثبات این قضیه چند خاصیت $S(A, B)$ و $d(A, B)$ را شرح می‌دهیم. داریم

$$S(A, B) = S(B, A), \qquad S(A, A) = 0; \tag{24}$$

$$S(A, B) \subset S(A, C) \cup S(C, B); \tag{25}$$

$$\left.\begin{array}{r} S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{array}\right\} \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2). \tag{26}$$

صحت (۲۴) واضح است، و (۲۵) از

$$(A - B) \subset (A - C) \cup (C - B), \qquad (B - A) \subset (C - A) \cup (B - C)$$

نتیجه می‌شود. اولین فرمول (۲۶) از

$$(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2)$$

به دست می‌آید. و اما، اگر برای متمم E بنویسیم E^c، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) &= S(A_1^c \cup A_2^c, B_1^c \cup B_2^c) \\ &\subset S(A_1^c, B_1^c) \cup S(A_2^c, B_2^c) = S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2); \end{aligned}$$

و، در صورت توجه به

$$A_1 - A_2 = A_1 \cap A_2^c,$$

آخرین فرمول (۲۶) به دست خواهد آمد.

بنابر (۲۳)، (۱۹)، و (۱۸)، این خواص $S(A, B)$ نتیجه می‌دهند که

$$d(A, B) = d(B, A), \qquad d(A, A) = 0, \tag{27}$$

$$d(A, B) \le d(A, C) + d(C, B), \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ d(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{aligned}\right\} \le d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2). \tag{29}$$

روابط (۲۷) و (۲۸) نشان می‌دهند که $d(A, B)$ در شرطهای تعریف ۲ ۱۵۰ صدق می‌کند، جز آنکه $d(A, B) = 0$ تساوی $A = B$ را ایجاب نخواهد کرد. به عنوان مثال، هرگاه $\mu = m$، A شمارشپذیر، و B تهی باشد، داریم

$$d(A, B) = m^*(A) = 0;$$

برای اثبات این مطلب، n مین نقطهٔ A را با بازه‌ای مانند I_n که

$$m(I_n) < 2^{-n}\varepsilon$$

می‌پوشانیم.

اما اگر دو مجموعهٔ A و B را در صورتی معادل تعریف کنیم که

$$d(A, B) = 0,$$

زیرمجموعه‌های R^p به رده‌های هم ارزی تقسیم می‌شود، و $d(A, B)$ مجموعهٔ این رده‌های هم ارزی را به یک فضای متری بدل می‌کند. در این صورت، $\mathfrak{M}_F(\mu)$ به عنوان بست $\mathscr{E}$ به‌دست می‌آید. این تعبیر برای اثبات لازم نیست، لکن ایدهٔ اصلی را توضیح خواهد داد.

به یک خاصیت دیگر $d(A, B)$، یعنی

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \le d(A, B), \tag{30}$$

در صورتی که حداقل یکی از $\mu^*(A)$, $\mu^*(B)$ متناهی باشد، نیاز خواهیم داشت. برای اثبات آن فرض می‌کنیم $0 \le \mu^*(B) \le \mu^*(A)$. پس (۲۸) نشان می‌دهد که

$$d(A,0) \le d(A, B) + d(B, 0);$$

یعنی،

$$\mu^*(A) \le d(A, B) + \mu^*(B).$$

چون $\mu^*(B)$ متناهی است، نتیجه می‌شود که

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq d(A, B).$$

برهان قضیهٔ ۱۰۰۱۱ . فرض کنیم $A \in \mathfrak{M}_F(\mu),\ B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ را قسمی اختیار می‌کنیم که $A_n \in \mathscr{E},\ B_n \in \mathscr{E},\ A_n \to A,\ B_n \to B$. پس (۲۹) و (۳۰) نشان می‌دهند که

$$A_n \cup B_n \to A \cup B, \tag{31}$$

$$A_n \cap B_n \to A \cap B, \tag{32}$$

$$A_n - B_n \to A - B, \tag{33}$$

$$\mu^*(A_n) \to \mu^*(A), \tag{34}$$

و $\mu^*(A) < +\infty$ زیرا $d(A_n, A) \to 0$. بنابر (۳۱) و (۳۳) ، $\mathfrak{M}_F(\mu)$ یک حلقه است.
بر طبق (۷) ،

$$\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n).$$

با فرض $n \to \infty$ ، بنابر (۳۴) و قضیهٔ ۸۰۱۱ (آ) ، خواهیم داشت

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B).$$

هرگاه $A \cap B = 0$، آنگاه $\mu^*(A \cap B) = 0$.

از اینجا نتیجه می‌شود که μ^* بر $\mathfrak{M}_F(\mu)$ جمعپذیر است.

حال فرض می‌کنیم $A \in \mathfrak{M}(\mu)$. پس A را می‌توان به‌صورت اجتماع گردآیهٔ شمارشپذیری از مجموعه‌های *ازهم‌جدای* $\mathfrak{M}_F(\mu)$ نشان داد. زیرا که اگر $A = \bigcup A_n'$ با این خاصیت که $A_n' \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ ، می‌نویسیم $A_1 = A_1'$ و

$$A_n = (A_1' \cup \cdots \cup A_n') - (A_1' \cup \cdots \cup A_{n-1}') \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

لذا ،

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{35}$$

نمایش مطلوب می‌باشد. بنابر (۱۹) ،

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{36}$$

از سوی دیگر، $A \supset A_1 \cup \cdots \cup A_n$ و بنابر جمعپذیری μ^* بر $\mathfrak{M}_F(\mu)$ خواهیم داشت

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \cdots + \mu^*(A_n). \tag{37}$$

معادلات (۳۶) و (۳۷) ایجاب خواهند کرد که

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{38}$$

فرض کنیم $\mu^*(A)$ متناهی‌باشد. قرار می‌دهیم $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$، در این صورت، (۳۸) نشان می‌دهد که، وقتی $n \to \infty$ ،

$$d(A, B_n) = \mu^*(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i) \to 0.$$

درنتیجه، $B_n \to A$. و چون $B_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ ، به آسانی دیده می‌شود که $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$.

پس نشان داده‌ایم که اگر $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ و $\mu^*(A) < +\infty$، $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$.

حال واضح است که μ^* بر $\mathfrak{M}(\mu)$ به‌طور شمارشپذیر جمعپذیر است. زیرا که اگر

$$A = \bigcup A_n,$$

که در آن $\{A_n\}$ دنبـالـه‌ای از مجموعه‌های ازهم جدای $\mathfrak{M}(\mu)$ باشد، نشان داده‌ایم که (۳۸) در صورتی که به ازای هر n $\mu^*(A_n) < +\infty$ برقرار و درحالت دیگر بدیهی است.

بالاخره، بـاید نشان دهیـم کـه $\mathfrak{M}(\mu)$ یک σ-حلقه است. گوییم اگر $A_n \in \mathfrak{M}(\mu)$، $n = 1, 2, 3, \ldots$، واضح است کـه $\bigcup A_n \in \mathfrak{M}(\mu)$ (قضیهٔ ۱۲۰۲). فرض‌کنیم $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ ، $B \in \mathfrak{M}(\mu)$ ، و

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

که در آنها $A_n, B_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. در این صورت، اتحاد

$$A_n \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_n \cap B_i)$$

نشان می‌دهد که $A_n \cap B \in \mathfrak{M}(\mu)$، و چون

$$\mu^*(A_n \cap B) \le \mu^*(A_n) < +\infty,$$

پس $A_n \cap B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$، لذا $A_n - B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$، و $A - B \in \mathfrak{M}(\mu)$ زیرا $A - B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - B)$.

حال اگر $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ ، $\mu(A)$ را جایگزین $\mu^*(A)$ می‌کنیم. پس μ ، که در اصل فقط بر $\mathscr{E}$ تعریف شده، به‌یک‌تابع مجموعه‌ای به طور شمارشپذیر جمعپذیر بر σ-حلقهٔ $\mathfrak{M}(\mu)$ تعمیم می‌یابد. این تابع مجموعه‌ای تعمیم یافته یک ***اندازه*** نام دارد. حالت خاص $\mu=m$ ***اندازهٔ لبگ*** بر R^p خوانده می‌شود.

۱۱۰۱۱ چند تبصره

(آ) هرگاه A بازباشد ، $A \in \mathfrak{M}(\mu)$. زیرا هرمجموعهٔ بازدر R^p اجتماع گردآیهٔ شمارشپذیری از بـازه‌های بـاز است . برای اثبات این مطلب کافی است پایهٔ شمارشپذیری بسازیم که اعضایش بازه‌هایی باز باشند .

با متممگیری نتیجه می‌شود که هر مجموعهٔ بسته در $\mathfrak{M}(\mu)$ است .

(ب) اگر $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ و $\varepsilon > 0$ ، مجموعه‌هایی مثل F و G هستند بطوری که

$$F \subset A \subset G,$$

F بسته است ، G باز است ، و

$$\mu(G - A) < \varepsilon, \qquad \mu(A - F) < \varepsilon. \tag{39}$$

اولین نـامساوی برقرار است ، چرا که μ^* به وسیلهٔ پوششهای مرکب از مجموعه‌های مقدماتی باز تعریف شده بود . نامساوی دوم با متممگیری نتیجه خواهد شد .

(پ) می‌گوییم E یک مجموعهٔ برل [1] است هـرگاه E رابتوان با تعدادی شمارشپذیر عمل به‌دست آورد ، نقطهٔ شروع مجموعه‌های‌بازباشد ، و هر عمل عبارت باشد از گرفتن اجتماع ، اشتراک ، یا متمـم . گردآیهٔ $\mathscr{B}$ تمام مجموعه‌های برل در R^p یک σـحلقه است ؛ در واقع ، این σـحلقه کوچکترین σـحلقه‌ای است که شامل تمام مجموعه‌های باز است . بنابر تبصرهٔ (آ) ، اگر $E \in \mathscr{B}$ ، $E \in \mathfrak{M}(\mu)$.

(ت) هرگاه $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ ، مجموعه‌های برلی چون F و G هستند بطوری که $F \subset A \subset G$ و

$$\mu(G - A) = \mu(A - F) = 0. \tag{40}$$

این مطلب از (ب) با اختیار $\varepsilon = 1/n$ و فرض $n \to \infty$ به دست می‌آید .

چون $A = F \cup (A - F)$ می‌بینیم کـه هر $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ اجتماع یک مجموعهٔ برل و مجموعه‌ای از اندازه صفر است .

مجموعه‌های برل بـه ازای هـر μ ، μـاندازه پذیرند . اما مجموعه‌های از انـدازهٔ صفر [یعنی ، مجموعه‌هایی چون E که برای آنها $\mu^*(E) = 0$] ممکن است به ازای μ هـای مختلف متفاوت باشند .

(ث) به ازای هر μ ، مجموعه‌های از اندازهٔ صفر یک σـحلقه تشکیل می‌دهند .

(ج) در حالت اندازهٔ لبگ ، هرمجموعهٔ شمارشپذیر دارای اندازهٔ صفر است . اما تعداد

---

1. Borel

شمارش‌ناپذیری (درواقع ، کاملی) مجموعه از اندازهٔ صفر وجود دارد . مجموعهٔ کانتور را می‌توان‌به عنوان‌یک نمونه‌در نظرگرفت : با استفاده از نمادگذاری‌بخش ۴۴۰۲ ، به آسانی دیده می‌شود که

$$m(E_n) = (\tfrac{2}{3})^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

و چون $P = \bigcap E_n$ ، به ازای هر n ، $P \subset E_n$ ، درنتیجه $m(P) = 0$ ،

فضاهای اندازه

۱۲۰۱۱ تعریف . فرض کنیم X یک‌مجموعه باشد ، مجموعه‌ای که لزوماً " زیرمجموعه‌ای از یک فضای اقلیدسی یا درواقع یک‌فضای‌متری‌دلخواه نیست . X را یک ***فضای اندازه*** گوییم هرگاه یک σـحلقه مانند $\mathfrak{M}$ از زیرمجموعه‌های X (که‌مجموعه‌های‌اندازه‌پذیر خوانده می‌شوند) و یک تابع مجموعه‌ای به طور شمارشپذیر جمعپذیر و نامنفی μ (که یک اندازه نام دارد) که بر $\mathfrak{M}$ تعریف شده وجود داشته باشد .

هرگاه ، علاوه‌براین ، $X \in \mathfrak{M}$ ، آنگاه X یک ***فضای اندازه‌پذیر*** خوانده خواهد شد .

به عنوان مثال ، می‌توانیم X را R^p ، $\mathfrak{M}$ را **گردآیهٔ** تمام زیرمجموعه‌های **لبگ اندازه پذیر** R^p ، و μ را اندازهٔ لبگ بگیریم .

یا اینکه فرض‌کنیم X مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت ، $\mathfrak{M}$ گردآیهٔ تمام زیرمجموعه‌های X ، و $\mu(E)$ تعداد عنصرهای E باشد .

مثال دیگر را نظریهٔ احتمال‌به دست می‌دهد ، به این ترتیب که پیشامدها را می‌توان به‌عنوان مجموعه‌هایی درنظرگرفت ، و احتمال رخ دادن آنها یک تابع مجموعه‌ای جمعپذیر (یا به طور شمارشپذیر جمعپذیر) می‌باشد .

در بخشهای زیر همیشه سروکار ما با فضاهای اندازه‌پذیر است . باید تأکید کنیم که نظریهٔ انتگرالگیری که‌بزودی مطرح می‌شود با فداکردن کلیتی که‌اکنون به‌آن رسیده‌ایم و تحدید خود به‌اندازهٔ لبگ ، مثلاً " ، بریک بازه از خط حقیقی ، به‌هیچوجه‌ساده‌تر نمی‌شود . درواقع ، دروضعیت کلیتر ، کیفیات اصلی نظریه با روشنی خیلی بیشتری بروز می‌کنند ، وضعیتی که درآن می‌بینیم همه‌چیز فقط به جمعپذیری به طور شمارشپذیر μ بریک σـحلقه بستگی دارد .

جای آن است که نماد

(41) $\qquad \{x \mid P\}$

را برای مجموعهٔ عناصر x که از خاصیت P بهره‌مندند معرفی کنیم .

تابهای اندازه‌پذیر

۱۳۰۱۱ تعریف. فرض کنیم f تابعی باشد که بر فضای اندازه‌پذیر X تعریف شده است و مقادیرش در دستگاه وسعت یافتهٔ اعداد حقیقی‌اند . تابع f را **اندازه‌پذیر** گوییم هرگاه مجموعهٔ

$$\{x|f(x) > a\} \tag{42}$$

به ازای هر a ی حقیقی اندازه‌پذیر باشد .

۱۴۰۱۱ مثال. هرگاه $X = R^p$ و $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mu)$ بصورتی باشد که در تعریف ۹۰۱۱ آمده ، آنگاه هر f پیوسته اندازه‌پذیر است ، زیرا که در این صورت (۴۲) مجموعهٔ بازی خواهد بود .

۱۵۰۱۱ قضیه. *هر یک از چهار شرط زیر سه شرط دیگر را ایجاب می‌کند :*

$$\{x|f(x) > a\} \text{ به ازای هر } a \text{ ی حقیقی اندازه‌پذیر است ؛} \tag{43}$$

$$\{x|f(x) \geq a\} \text{ به ازای هر } a \text{ ی حقیقی اندازه‌پذیر است ؛} \tag{44}$$

$$\{x|f(x) < a\} \text{ به ازای هر } a \text{ ی حقیقی اندازه‌پذیر است ؛} \tag{45}$$

$$\{x|f(x) \leq a\} \text{ به ازای هر } a \text{ ی حقیقی اندازه‌پذیر است .} \tag{46}$$

برهان. روابط

$$\{x|f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x|f(x) > a - \frac{1}{n}\right\},$$

$$\{x|f(x) < a\} = X - \{x|f(x) \geq a\},$$

$$\{x|f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x|f(x) < a + \frac{1}{n}\right\},$$

$$\{x|f(x) > a\} = X - \{x|f(x) \leq a\}$$

بترتیب نشان می‌دهند که (۴۳) (۴۴) ، (۴۴) (۴۵) ، (۴۵) (۴۶) ، و (۴۶) (۴۳) را ایجاب می‌کند .

درنتیجه ، هریک‌از این شرطها را می‌توان به جای (۴۲) برای تعریف اندازه‌پذیری به کار برد .

۱۶۰۱۱ قضیه. هرگاه f اندازه‌پذیر باشد، $|f|$ نیز اندازه پذیر است.

برهان

$$\{x \mid |f(x)| < a\} = \{x \mid f(x) < a\} \cap \{x \mid f(x) > -a\}.$$

۱۷۰۱۱ قضیه. فرض‌کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشد. به‌ازای هر $x \in X$ قرار می‌دهیم

$$g(x) = \sup f_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$h(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x).$$

در این صورت، g و h اندازه‌پذیر خواهند بود.

البته، همین مطلب در مورد inf و lim inf نیز درست است،

برهان

$$\{x \mid g(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > a\},$$
$$h(x) = \inf g_m(x),$$

که در آن $g_m(x) = \sup f_n(x)\ (n \geq m)$.

چند نتیجه

(آ) هرگاه f و g اندازه‌پذیر باشند، $\max(f, g)$ و $\min(f, g)$ اندازه پذیرند. چنانچه

$$f^+ = \max(f, 0), \qquad f^- = -\min(f, 0), \tag{47}$$

بخصوص، نتیجه می‌شود که f^+ و f^- اندازه‌پذیرند.

(ب) حد یک دنبالهٔ همگرا از توابع اندازه‌پذیر اندازه‌پذیر است.

۱۸۰۱۱ قضیه. فرض‌کنیم f و g توابع حقیقی اندازه‌پذیری باشند که بر X تعریف شده‌اند،

F را بر R^2 حقیقی و پیوسته می‌انگاریم، و قرار می‌دهیم

$$h(x) = F(f(x), g(x)) \qquad (x \in X).$$

در این صورت، h اندازه‌پذیر خواهد بود.

بویژه، $f+g$ و fg اندازه‌پذیر می‌باشند.

برهان. فرض کنیم

$$G_a = \{(u, v) \mid F(u, v) > a\}.$$

در این صورت، G_a زیرمجموعهٔ بازی از R^2 است، و می‌توانیم بنویسیم

$$G_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

که درآن $\{I_n\}$ دنباله‌ای از بازه‌های باز می‌باشد:

$$I_n = \{(u, v) \mid a_n < u < b_n,\ c_n < v < d_n\}.$$

چون

$$\{x \mid a_n < f(x) < b_n\} = \{x \mid f(x) > a_n\} \cap \{x \mid f(x) < b_n\}$$

اندازه‌پذیر است، نتیجه می‌شود که مجموعهٔ

$$\{x \mid (f(x), g(x)) \in I_n\} = \{x \mid a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x \mid c_n < g(x) < d_n\}$$

اندازه‌پذیر است. پس همین مطلب برای

$$\begin{aligned}\{x \mid h(x) > a\} &= \{x \mid (f(x), g(x)) \in G_a\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid (f(x), g(x)) \in I_n\}\end{aligned}$$

صحیح خواهد بود.

خلاصه آنکه، می‌توان این طور گفت که تمام اعمال معمولی آنالیز، به انضمام اعمال حدی، وقتی درمورد توابع اندازه‌پذیر به کار روند، به توابع اندازه‌پذیر ختم می‌شوند. به عبارت دیگر، تمام توابعی که معمولاً با آنها مواجهیم اندازه‌پذیر می‌باشند.

اینکه این مطلب بهرحال مطلب ناقصی است از مثال زیر (که مبتنی بر اندازهٔ لبگ بر خط حقیقی است) دیده می‌شود: هرگاه $h(x) = f(g(x))$، که درآن f اندازه‌پذیر و g پیوسته است، آنگاه h الزاماً "اندازه‌پذیر نیست. (برای جزئیات کار، خواننده را به کتاب مک‌شین[1]، صفحهٔ ۲۴۱، ارجاع می‌دهیم.)

1. McShane

خواننده احتمالاً متوجه شده است که در بحث ما از توابع اندازه‌پذیر ذکری از اندازه نکرده‌ایم. درواقع، رده‌ٔ توابع اندازه‌پذیر بر X فقط به σ-حلقه‌ٔ $\mathfrak{M}$ (نماد تعریف ۱۲۰۱۱ را به‌کار برده‌ایم) بستگی دارد. به عنوان مثال، می‌توان از توابع برل ـ اندازه‌پذیر بر R^p سخن گفت، یعنی از توابعی چون f که برای آنها

$$\{x|f(x) > a\}$$

همیشه یک مجموعه‌ٔ برل است، بی‌آنکه به اندازه‌ٔ خاصی اشاره شده باشد.

توابع ساده

۱۹۰۱۱ تعریف. فرض‌کنیم s یک تابع حقیقی باشد که بر X تعریف شده است. هرگاه برد s متناهی باشد، می‌گوییم s یک ***تابع ساده*** است.

فرض کنیم $E \subset X$ و قرار می‌دهیم

$$K_E(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E), \\ 0 & (x \notin E). \end{cases} \tag{48}$$

K_E ***تابع مشخص*** E نام دارد.

فرض کنیم برد s از اعداد متمایز $c_1, \ldots, c_n$ تشکیل شده باشد. قرار می‌دهیم

$$E_i = \{x|s(x) = c_i\} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

در این صورت،

$$s = \sum_{n=1}^{n} c_i K_{E_i} ; \tag{49}$$

یعنی، هرتابع ساده یک ترکیب خطی متناهی از توابع مشخص می‌باشد. واضح است که s اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعه‌های $E_1, \ldots, E_n$ اندازه‌پذیر باشند.

جالب این است که هر تابع را می‌توان با توابع ساده تقریب کرد:

۲۰۰۱۱ قضیه. *فرض‌کنیم f یک تابع حقیقی بر X باشد. دنباله‌ای مانند $\{s_n\}$ از توابع ساده هست بطوری که به‌ازای هر $x \in X$، وقتی $n \to \infty$، $s_n(x) \to f(x)$. هرگاه f اندازه‌پذیر باشد، $\{s_n\}$ را می‌توان دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر گرفت. چنانچه $f \geq 0$، $\{s_n\}$ ممکن است دنباله‌ای صعودی اختیار شود.*

برهان. اگر $f \geq 0$، به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots, i = 1, 2, \ldots, n2^n$ تعریف می‌کنیم

$$E_{ni} = \left\{x \left| \frac{i-1}{2^n} \le f(x) < \frac{i}{2^n} \right.\right\}, \qquad F_n = \{x | f(x) \ge n\}\cdot$$

قرار می‌دهیم

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} K_{E_{ni}} + nK_{F_n}\cdot \tag{50}$$

در حالت کلی ، فرض می‌کنیم $f = f^+ - f^-$ و مجموعه‌های قبلی را در مورد f^+ و f^- می‌سازیم .

احتمالا " متوجه شده‌اید که ، در صورت کراندار بودن f ، دنبالهٔ $\{s_n\}$ داده شده با (۵۰) به‌طور یکنواخت به f همگراست .

انتگرالگیری

ما انتگرالگیری را برفضای اندازه‌پذیر X ، که در آن $\mathfrak{M}$ ، σ-حلقهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر و μ اندازه است ، تعریف می‌کنیم . خواننده‌ای که بخواهد حالت واقعی‌تری را تجسم کند می‌تواند X را خط حقیقی ، یا یک بازهٔ ، و μ را اندازه لبگ m فرض نماید .

۱۱۰۲۱ تعریف . فرض می‌کنیم

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x) \qquad (x \in X, c_i > 0) \tag{51}$$

اندازه‌پذیر باشد ، و این‌طور می‌انگاریم که $E \in \mathfrak{M}$. تعریف می‌کنیم

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i)\cdot \tag{52}$$

اگر f اندازه‌پذیر و نامنفی باشد ، تعریف می‌کنیم

$$\int_E f\, d\mu = \sup I_E(s) \tag{53}$$

که در آن سوپرمم روی تمام توابع سادهٔ اندازه‌پذیر s ، که $0 \le s \le f$ ، گرفته شده است .

طرف چپ (۵۳) ***انتگرال لبگ*** f ، نسبت به‌اندازهٔ μ ، روی مجموعهٔ E ، نامیده می‌شود . باید توجه داشت که ممکن است انتگرال مقدارش $+\infty$ باشد .

به‌آسانی می‌شود تحقیق کرد که به ازای هر تابع اندازه‌پذیر ساده و نامنفی s

$$\int_E s\, d\mu = I_E(s)\cdot \tag{54}$$

۱۱۰۲۲ تعریف . فرض کنیم f اندازه‌پذیر باشد ، و دو انتگرال

$$\int_E f^+\, d\mu, \qquad \int_E f^-\, d\mu \tag{55}$$

را ، که در آنها f^+ و f^- به صورت (۴۷) تعریف شده‌اند ، در نظر می‌گیریم .

چنانچه دست کم یکی از انتگرالهای (۵۵) متناهی باشد ، تعریف می‌کنیم

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu. \tag{56}$$

هرگاه دو انتگرال (۵۵) متناهی باشد ، (۵۶) متناهی است و می‌گوییم f بر E *انتگرالپذیر* (یا مجموعپذیر) به معنی لبگ ، نسبت به μ ، است و می‌نویسیم $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E . اگر $\mu = m$، نماد معمول چنین خواهد بود: $f \in \mathscr{L}$ بر E .

این اصطلاح ممکن است کمی گیج کننده باشد : هرگاه (۵۶) مساوی $+\infty$ یا $-\infty$ شود ، آنگاه ، با اینکه f به معنی فوق انتگرالپذیر نیست ، انتگرال f روی E تعریف شده است ؛ f روی E انتگرالپذیر است فقط اگر که انتگرالش روی E متناهی باشد .

با آنکه در بعضی حالات ، مطلوب پرداختن به حالت کلیتر است ، لکن توجه ما اصلاً معطوف توابع انتگرالپذیر خواهد بود .

۲۳۰۱۱ چند تبصره. خواص زیر واضح هستند :

(آ) هرگاه f بر E اندازه‌پذیر و کراندار باشد ، و $\mu(E) < +\infty$ آنگاه $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E ؛

(ب) هرگاه به ازای $x \in E$، $a \le f(x) \le b$ و $\mu(E) < +\infty$ آنگاه

$$a\mu(E) \le \int_E f\,d\mu \le b\mu(E);$$

(پ) هرگاه $f, g \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E ، و به ازای $x \in E$، $f(x) \le g(x)$ آنگاه

$$\int_E f\,d\mu \le \int_E g\,d\mu;$$

(ت) هرگاه $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E ، آنگاه به ازای هر ثابت متناهی c ، $cf \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E و

$$\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu;$$

(ث) هرگاه $\mu(E) = 0$ و f اندازه‌پذیر باشد ، آنگاه

$$\int_E f\,d\mu = 0;$$

(ج) هرگاه $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E ، $A \in \mathfrak{M}$، و $A \subset E$، آنگاه $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر A .

۲۴۰۱۱ قضیه

(آ) فرض کنیم f بر X اندازه‌پذیر و نامنفی باشد . به ازای $A \in \mathfrak{M}$ تعریف می‌کنیم

$$\phi(A) = \int_A f\, d\mu. \tag{57}$$

در این صورت، ϕ بر $\mathfrak{M}$ به طور شمارشپذیر جمعپذیر است.

(ب) همین نتیجه در صورتی که $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر X برقرار است.

برهان. واضح است که (ب) از (آ) در صورتی که بنویسیم $f = f^+ - f^-$ و (آ) را در مورد f^+ و f^- اعمال کنیم نتیجه خواهد شد.

برای اثبات (آ) باید نشان دهیم که اگر $A_n \in \mathfrak{M}\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$، به ازای $i \neq j$، $A_i \cap A_j = 0$، و $A = \bigcup_1^\infty A_n$، داریم

$$\phi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n). \tag{58}$$

گوییم هرگاه f یک تابع مشخص باشد، جمعپذیری ϕ به طور شمارشپذیر همان جمعپذیری μ به طور شمارشپذیر است، زیرا

$$\int_A K_E\, d\mu = \mu(A \cap E).$$

هرگاه f ساده باشد، آنگاه f به شکل (۵۱) است و نتیجه باز برقراری باشد.

در حالت کلی، به ازای هر تابع سادهٔ اندازه پذیر s که $0 \le s \le f$، داریم

$$\int_A s\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s\, d\mu \le \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

پس، بر طبق (۵۳)،

$$\phi(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n). \tag{59}$$

حال اگر به ازای n ی $\phi(A_n) = +\infty$، (۵۸) بدیهی است زیرا $\phi(A) \ge \phi(A_n)$. فرض کنیم به ازای هر n، $\phi(A_n) < +\infty$.

برای $\varepsilon > 0$ داده شده می‌توان تابع اندازه‌پذیری را قسمی اختیار کرد که $0 \le s \le f$،

$$\int_{A_1} s\, d\mu \ge \int_{A_1} f\, d\mu - \varepsilon, \qquad \int_{A_2} s\, d\mu \ge \int_{A_2} f\, d\mu - \varepsilon. \tag{60}$$

لذا،

$$\phi(A_1 \cup A_2) \ge \int_{A_1 \cup A_2} s\, d\mu = \int_{A_1} s\, d\mu + \int_{A_2} s\, d\mu \ge \phi(A_1) + \phi(A_2) - 2\varepsilon;$$

در نتیجه،

$$\phi(A_1 \cup A_2) \neq \geq \phi(A_1) + \phi(A_2).$$

از اینجا نتیجه می‌شود که به ازای هر n ،

$$\phi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq \phi(A_1) + \cdots + \phi(A_n). \tag{61}$$

چون $A \supset A_1 \cup \cdots \cup A_n$ ، (۶۱) ایجاب می‌کند که

$$\phi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n), \tag{62}$$

و (۵۸) از (۵۹) و (۶۲) نتیجه خواهد شد.

نتیجه. هرگاه $A \in \mathfrak{M}$، $B \subset A$، و $\mu(A - B) = 0$، آنگاه

$$\int_A f\, d\mu = \int_B f\, d\mu.$$

چون $A = B \cup (A - B)$، این نتیجه از تبصرهٔ ۲۳۰۱۱ (ث) حاصل خواهد شد.

۲۵۰۱۱ چند تبصره. نتیجهٔ قبل نشان می‌دهد که، در انتگرالگیری، مجموعه‌های از اندازهٔ صفر قابل اغماضند.

می‌نویسیم $f \sim g$ بر E هرگاه مجموعهٔ

$$\{x | f(x) \neq g(x)\} \cap E$$

دارای اندازهٔ صفر باشد.

پس $f \sim f$ ؛ $f \sim g$ ایجاب می‌کند که $g \sim f$، و $f \sim g$ و $g \sim h$ ایجاب می‌کنند که $f \sim h$. یعنی، رابطهٔ $\sim$ یک رابطهٔ هم ارزی می‌باشد.

چنانچه $f \sim g$ بر E ، بوضوح خواهیم داشت

$$\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$$

مشروط براینکه به ازای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر A از E انتگرالها وجود داشته باشند.

هرگاه خاصیت P به‌ازای هر $x \in E - A$ برقرار باشد و $\mu(A) = 0$، معمولا" می‌گوییم P تقریبا" به ازای هر $x \in E$ برقرار است، یا اینکه P تقریبا" همه جا بر E برقرار می‌باشد. (البته، مفهوم "تقریبا" همه‌جا" به اندازهٔ خاص مورد نظر بستگی دارد. در کتابها معمولا" اندازهٔ لبگ مورد نظر است مگر آنکه خلافش قید شده باشد.)

واضح است‌که اگر $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E ، $f(x)$ باید تقریبا" همه جا بر E متناهی باشد . لذا ، در بیشتر حالات ، بااین فرض‌که توابع داده شده از اول مقادیر متناهی دارند کلیتی از کف نخواهد رفت .

۲۶۰۱۱ قضیه. هرگاه $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E ، آنگاه $|f| \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E و

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \le \int_E |f|\,d\mu. \tag{63}$$

برهان. می‌نویسیم $E = A \cup B$ که در آن $f(x) \ge 0$ بر A و $f(x) < 0$ بر B . بنابر قضیهٔ ۲۴۰۱۱ ،

$$\int_E |f|\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu + \int_B |f|\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu + \int_B f^-\,d\mu < +\infty;$$

درنتیجه، $|f| \in \mathscr{L}(\mu)$. چون $f \le |f|$ و $-f \le |f|$، می‌بینیم که

$$\int_E f\,d\mu \le \int_E |f|\,d\mu, \qquad -\int_E f\,d\mu \le \int_E |f|\,d\mu,$$

و (۶۳) نتیجه خواهد شد .

چون انتگرالپذیری f انتگرالپذیری $|f|$ را ایجاب می‌کند ، غالبا" انتگرال لبگ انتگرال به طور مطلق همگرا نامیده می‌شود . البته ، تعریف انتگرالهای به طور نامطلق همگرا میسر است و انجامش در بررسی چند موضوع لازم می‌شود . لکن این انتگرالها از چند تا از مفیدترین خواص انتگرال لبگ بی‌بهره‌اند و نقش نسبتا" کم اهمیت‌تری در آنالیز ایفا می‌کنند .

۲۷۰۱۱ قضیه. فرض کنیم f بر E اندازه پذیر باشد، $|f| \le g$، و $g \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E . **در این صورت،** $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E .

برهان. داریم $f^+ \le g$ و $f^- \le g$.

۲۸۰۱۱ قضیهٔ همگرایی یکنوای لبگ. فرض کنیم $E \in \mathfrak{M}$. $\{f_n\}$ **را دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر می‌انگاریم بطوری که**

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \qquad (x \in E). \tag{64}$$

فرض کنیم f با

$$f_n(x) \to f(x) \qquad (x \in E), \tag{65}$$

وقتی $n \to \infty$، تعریف شده باشد. در این صورت،

$$\int_E f_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu \qquad (n \to \infty). \tag{66}$$

برهان. به استناد (۶۴) واضح است که، وقتی $n \to \infty$، به ازای α ای

$$\int_E f_n \, d\mu \to \alpha. \tag{67}$$

و چون $\int f_n \le \int f$، داریم

$$\alpha \le \int_E f \, d\mu. \tag{68}$$

c را قسمی اختیار می‌کنیم که $0 < c < 1$، و فرض می‌کنیم s یک تابع اندازه‌پذیر ساده باشد بطوری که $0 \le s \le f$. قرار می‌دهیم

$$E_n = \{x | f_n(x) \ge cs(x)\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

بنابر (۶۴) $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$؛ و، مطابق (۶۵)،

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{69}$$

به ازای هر n

$$\int_E f_n \, d\mu \ge \int_{E_n} f_n \, d\mu \ge c \int_{E_n} s \, d\mu. \tag{70}$$

در روابط (۷۰) فرض می‌کنیم $n \to \infty$. چون انتگرال یک تابع مجموعه‌ای به طور شمارش‌پذیر جمع‌پذیر است (قضیهٔ ۲۴۰۱۱)، (۶۹) نشان می‌دهد که می‌توان قضیهٔ ۳۰۱۱ را در مورد آخرین انتگرال در (۷۰) به کار برد و نتیجه گرفت که

$$\alpha \ge c \int_E s \, d\mu. \tag{71}$$

با فرض $c \to 1$ می‌بینیم که

$$\alpha \ge \int_E s \, d\mu,$$

و (۵۳) ایجاب می‌کند که

$$\alpha \ge \int_E f \, d\mu. \tag{72}$$

قضیه از (۶۷)، (۶۸)، و (۷۲) نتیجه خواهد شد.

۲۹۰۱۱ قضیه. فرض کنیم $f=f_1+f_2$ که درآن $f_i \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E $(i=1, 2)$. دراین‌صورت، $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E و

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f_1\,d\mu + \int_E f_2\,d\mu. \tag{73}$$

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f_1 \geq 0$ و $f_2 \geq 0$. اگر f_1 و f_2 ساده‌باشند، (۷۳) بسادگی از (۵۲) و (۵۴) نتیجه‌می‌شود. درغیر این‌صورت، دنباله‌های‌صعودی $\{s_n'\}$ و $\{s_n''\}$ ازتوابع سادهٔ اندازه‌پذیرو نامنفی را که همگرا به f_1 و f_2اند اختیار می‌کنیم. قضیهٔ ۲۰۰۱۱ میسر بودن این کار را نشان می‌دهد. قرار می‌دهیم $s_n = s_n' + s_n''$. پس

$$\int_E s_n\,d\mu = \int_E s_n'\,d\mu + \int_E s_n''\,d\mu,$$

و (۷۳) در صورتی که فرض کنیم $n \to \infty$ و به قضیهٔ ۲۸۰۱۱ متوسل شویم نتیجه خواهد شد.

حال فرض می‌کنیم $f_1 \geq 0$ و $f_2 \leq 0$. قرار می‌دهیم

$$A = \{x | f(x) \geq 0\}, \qquad B = \{x | f(x) < 0\}.$$

در این صورت، f، f_1، $-f_2$ بر A نامنفی‌اند. درنتیجه،

$$\int_A f_1 d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A (-f_2)\,d\mu = \int_A f\,d\mu - \int_A f_2\,d\mu. \tag{74}$$

بهمین نحو، $-f$، f_1، $-f_2$ بر B نامنفی‌اند. درنتیجه،

$$\int_B (-f_2)\,d\mu = \int_B f_1\,d\mu + \int_B (-f)\,d\mu,$$

یا

$$\int_B f_1\,d\mu = \int_B f\,d\mu - \int_B f_2\,d\mu, \tag{75}$$

و، در صورتی که (۷۴) را به (۷۵) بیفزاییم، (۷۳) نتیجه خواهد شد.

در حالت کلی، E را می‌توان به چهار مجموعهٔ E_i طوری تقسیم کرد که $f_1(x)$ و

$f_2(x)$ بر هر یک علامت ثابت داشته باشند . دو حالتی که تاکنون ثابت کرده‌ایم ایجاب می‌کنند که

$$\int_{E_i} f\,d\mu = \int_{E_i} f_1\,d\mu + \int_{E_i} f_2\,d\mu \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

و (۷۳) با افزودن این چهار معادله بهم نتیجه خواهد شد .

حال در وضعی هستیم که می‌توانیم قضیهٔ ۲۸۰۱۱ را برای سریها از نو تنظیم کنیم .

۳۰۰۱۱ قضیه . فرض کنیم $E \in \mathfrak{M}$. هرگاه $\{f_n\}$ *دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد* و

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E), \tag{76}$$

آنگاه

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

برهان . مجموعهای جزئی (۷۶) یک دنبالهٔ صعودی تشکیل می‌دهند .

۳۱۰۱۱ قضیهٔ فاتو[1] **.** فرض کنیم $E \in \mathfrak{M}$. هرگاه $\{f_n\}$ *دنباله‌ای ازتوابع اندازه پذیر نامنفی باشد* و

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E),$$

آنگاه

$$\int_E f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu. \tag{77}$$

در (۷۷) ممکن است نامساوی اکید برقرار شود . مثالی در تمرین ۵ آورده شده است .

برهان . به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ و $x \in E$ قرار می‌دهیم

1. Fatou

$$g_n(x) = \inf f_i(x) \qquad (i \geq n).$$

در این صورت، g_n بر E اندازه‌پذیر است، و

$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots, \tag{78}$$

$$g_n(x) \leq f_n(x), \tag{79}$$

$$g_n(x) \to f(x) \qquad (n \to \infty). \tag{80}$$

بنابر (۷۸)، (۸۰)، و قضیهٔ ۲۸۰۱۱

$$\int_E g_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu, \tag{81}$$

پس (۷۷) از (۷۹) و (۸۱) نتیجه خواهد شد.

۳۲۰۱۱ قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ. *فرض کنیم $E \in \mathfrak{M}$، $\{f_n\}$ را دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر می‌انگاریم بقسمی که، وقتی $n \to \infty$،*

$$f_n(x) \to f(x) \qquad (x \in E). \tag{82}$$

هرگاه تابعی چون $g \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E چنان باشد که

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, x \in E), \tag{83}$$

آنگاه

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu. \tag{84}$$

بخاطر (۸۳) می‌گوییم $\{f_n\}$ تحت تسلط g است، و در بارهٔ همگرایی تسلطی سخن می‌گوییم. بنابرتبصرهٔ ۲۵۰۱۱، اگر (۸۲) تقریباً" همه جا بر E برقرار باشد، نتیجه یکی خواهد بود.

برهان. ابتدا (۸۳) و قضیهٔ ۲۷۰۱۱ ایجاب می‌کنند که $f_n \in \mathscr{L}(\mu)$ و $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E.
چون $f_n + g \geq 0$، قضیهٔ فاتو نشان می‌دهد که

$$\int_E (f + g) \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_E (f_n + g) \, d\mu,$$

یا

$$\int_E f \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_E f_n \, d\mu. \tag{85}$$

و چون $g - f_n \geq 0$ ، به همین نحو می‌بینیم که

$$\int_E (g-f)\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E (g-f_n)\,d\mu.$$

در نتیجه،

$$-\int_E f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\left[-\int_E f_n\,d\mu\right],$$

که همان

$$\int_E f\,d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f\,d\mu \tag{86}$$

می‌باشد.

حال وجود حد در (۸۴) و تساوی عنوان شده در آن از (۸۵) و (۸۶) نتیجه خواهد شد.

نتیجه. ***هرگاه $\mu(E) < +\infty$ ، $\{f_n\}$ بر E به طور یکنواخت کراندار باشد، و $f_n(x) \to f(x)$ بر E ، آنگاه (۸۴) برقرار خواهد بود.***

یک دنبالهٔ به طور یکنواخت کراندار همگرا اغلب به طور کراندار همگرا نامیده می‌شود.

مقایسه با انتگرال ریمان

قضیهٔ بعدی ما نشان می‌دهد که هر تابع که بر بازه‌ای انتگرال ریمان داشته باشد انتگرال لبگ نیز دارد، و توابع انتگرال ریمان‌دار تابع شرایط پیوستگی نسبتاً دقیقی می‌باشند. بنابراین، قطع نظر از اینکه نظریهٔ لبگ به ما توان انتگرالگیری از ردهٔ بسیار وسیعتری از توابع را می‌دهد، شاید بزرگترین مزیتش در سهولتی باشد که بسیاری از اعمال حد را می‌شود با آن انجام داد. از این دیدگاه، قضایای همگرایی لبگ را می‌توان به عنوان قلب و اساس نظریهٔ لبگ ملحوظ داشت.

یکی از مشکلاتی که در نظریهٔ ریمان با آن مواجهیم این است که حدود تابعهای انتگرال ریمان‌دار (یا حتی توابع پیوسته) ممکن است انتگرال ریمان نداشته باشند. این مشکل در این وضع تقریباً رفع شده است، زیرا حدود توابع اندازه‌پذیر همیشه اندازه‌پذیر می‌باشند.

فرض کنیم فضای اندازهٔ X بازهٔ $[a, b]$ از خط حقیقی، با $\mu = m$ (اندازهٔ لبگ)، و

$\mathfrak{M}$ خانوادهٔ زیرمجموعه‌های اندازه‌ٔلبگ‌دار $[a, b]$ باشد. برای انتگرال لبگ f روی $[a, b]$ رسم این است که به جای

$$\int_X f\,dm$$

از نماد آشنای

$$\int_a^b f\,dx$$

استفاده می‌شود. در این وضع، برای آنکه انتگرالهای ریمان از انتگرالهای لبگ متمایز باشند، اولیها را با

$$\mathscr{R}\int_a^b f\,dx$$

نشان خواهیم داد.

۳۳۰۱۱ قضیه

(آ) هرگاه $f \in \mathscr{R}$ بر $[a, b]$، آنگاه $f \in \mathscr{L}$ بر $[a, b]$ و

$$\int_a^b f\,dx = \mathscr{R}\int_a^b f\,dx. \tag{87}$$

(ب) فرض کنیم f بر $[a, b]$ کراندار باشد. در این صورت، $f \in \mathscr{R}$ بر $[a, b]$ اگر و فقط اگر f بر $[a, b]$ تقریباً" همه جا پیوسته باشد.

برهان. فرض کنیم f کراندار باشد. بنابر تعریف ۱۰۶ و قضیهٔ ۴۰۶، دنباله‌ای مانند $\{P_k\}$ از افرازهای $[a, b]$ هست بطوری که P_{k+1} یک تظریف P_k است، فاصلهٔ بین نقاط مجاور P_k از $1/k$ کمتر است، و

$$\lim_{k\to\infty} L(P_k, f) = \mathscr{R}\underline{\int} f\,dx, \qquad \lim_{k\to\infty} U(P_k, f) = \mathscr{R}\overline{\int} f\,dx. \tag{88}$$

(در این برهان، تمام انتگرالها روی $[a, b]$ گرفته شده‌اند.)

چنانچه $P_k = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ با $x_0 = a$ و $x_n = b$، تعریف می‌کنیم

$$U_k(a) = L_k(a) = f(a);$$

با استفاده از نمادهای آمده در تعریف ۱۰۶، به ازای $x_{i-1} < x \le x_i$ و $1 \le i \le n$ قرار می‌دهیم

$U_k(x) = M_i$ و $L_k(x) = m_i$. در این صورت ،

$$L(P_k, f) = \int L_k \, dx, \qquad U(P_k, f) = \int U_k \, dx, \tag{89}$$

و به ازای هر $x \in [a, b]$

$$L_1(x) \le L_2(x) \le \cdots \le f(x) \le \cdots \le U_2(x) \le U_1(x), \tag{90}$$

زیرا P_{k+1} یک تظریف P_k است . بنابر (۹۰) ، حدود

$$L(x) = \lim_{k \to \infty} L_k(x), \qquad U(x) = \lim_{k \to \infty} U_k(x) \tag{91}$$

وجود خواهند داشت .

ملاحظه کنید که L و U توابعی اندازه‌پذیر و کراندار بر $[a, b]$ اند ،

$$L(x) \le f(x) \le U(x) \qquad (a \le x \le b), \tag{92}$$

و، بنابر (۸۸) ، (۹۰) ، و قضیهٔ همگرایی یکنوا ،

$$\int L \, dx = \mathscr{R} \underline{\int} f \, dx, \qquad \int U \, dx = \mathscr{R} \overline{\int} f \, dx. \tag{93}$$

تاکنون هیچ فرضی در مورد f نشده است جز آنکه f یک تابع حقیقی کراندار بر $[a, b]$ می‌باشد .

برای اتمام برهان ، توجه کنید که $f \in \mathscr{R}$ اگر و فقط اگر انتگرالهای ریمان بالایی و پایینی مساوی باشند ؛ درنتیجه ، اگر و فقط اگر

$$\int L \, dx = \int U \, dx. \tag{94}$$

چون $L \le U$ ، (۹۴) روی خواهد داد اگر و فقط اگر به ازای تقریبا " هر $x \in [a, b]$ $L(x) = U(x)$ (تمرین ۱) .

درآن وضع ، (۹۲) ایجاب خواهد کرد که ، تقریبا " همه جا بر $[a, b]$ ،

$$L(x) = f(x) = U(x). \tag{95}$$

درنتیجه ، f اندازه‌پذیر است ، و (۸۷) از (۹۳) و (۹۵) حاصل خواهد شد .

بعلاوه ، اگر x به هیچ P_kای متعلق نباشد ، خیلی ساده می‌شود دید که $U(x) = L(x)$ اگر وفقط اگر f در x پیوسته باشد . چون اجتماع مجموعه‌های P_k شمارش‌پذیر است ، اندازه‌اش 0 است ، و ما نتیجه می‌گیریم که f تقریبا " همه‌جا بر $[a, b]$ پیوسته است اگر و فقط اگر تقریبا "

همه جا $L(x) = U(x)$ ؛ درنتیجه، (همانطور که در بالا دیدیم) اگر و فقط اگر $f \in \mathscr{R}$.
این برهان را تمام خواهد کرد.

ارتباط مأنوس موجود میان انتگرالگیری و مشتقگیری تا حدود زیاد به نظریهٔ لبگ نقل یافته است. هرگاه $f \in \mathscr{L}$ بر $[a, b]$ و

$$F(x) = \int_a^x f\,dt \qquad (a \le x \le b), \tag{96}$$

آنگاه تقریبا" همه جا بر $[a, b]$ ، $F'(x) = f(x)$.

بعکس، هرگاه F در هر نقطه از $[a, b]$ مشتقپذیر باشد (در اینجا "تقریبا" همه جا" کافی نیست!) و $F' \in \mathscr{L}$ بر $[a, b]$ ، آنگاه

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) \qquad (a \le x \le b).$$

برای برهانهای این دو قضیه، خواننده را به هر یک از آثار در باب انتگرالگیری که در کتابنامه ذکر شده ارجاع می‌دهیم.

انتگرالگیری از توابع مختلط

فرض کنیم f یک تابع مختلط باشد که بر فضای اندازهٔ X تعریف شده است، و $f = u + iv$ که در آن u و v حقیقی‌اند. می‌گوییم f اندازه پذیر است اگر و فقط اگر هر دوی u و v اندازه‌پذیر باشند.

بسهولت می‌توان تحقیق کرد که مجموعها و حاصل ضربهای توابع اندازه‌پذیر مختلط نیز اندازه پذیرند. چون

$$|f| = (u^2 + v^2)^{1/2},$$

قضیهٔ ۱۸۰۱۱ نشان می‌دهد که $|f|$ به ازای هر f مختلط اندازه‌پذیر اندازه‌پذیر می‌باشد.

فرض کنیم μ اندازه‌ای بر X ، E زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیری از X ، و f تابع مختلطی بر X باشد. می‌گوییم $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E مشروط بر اینکه f اندازه پذیر باشد و

$$\int_E |f|\,d\mu < +\infty, \tag{97}$$

و، در صورت برقرار بودن (۹۷)، تعریف می‌کنیم

$$\int_E f\,d\mu = \int_E u\,d\mu + i\int_E v\,d\mu.$$

چون $|u| \le |f|$ ، $|v| \le |f|$ ، و $|f| \le |u| + |v|$ ، واضح است که (۹۷) برقرار است اگر و فقط اگر $u \in \mathscr{L}(\mu)$ و $v \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E .

حال قضایای ۱۱·۲۳ (آ) ، (ت) ، (ث) ، (ج) ، ۱۱·۲۴ (ب) ، ۱۱·۲۶ ، ۱۱·۲۷ ، ۱۱·۲۹ ، و ۱۱·۳۲ را می‌توان به انتگرالهای لبگ توابع مختلط تعمیم داد . اثباتها کاملاً سرراستند . تنها برهان قضیهٔ ۱۱·۲۶ جالب توجه است :

هرگاه $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E ، عدد مختلطی مانند c هست ، که $|c| = 1$ ، بطوری که

$$c \int_E f \, d\mu \ge 0.$$

قرار می‌دهیم $g = cf = u + iv$ که در آن u و v حقیقی‌اند . در این صورت ،

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| = c \int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu = \int_E u \, d\mu \le \int_E |f| \, d\mu.$$

سومین تساوی فوق برقرار است چرا که تساویهای قبلی نشان می‌دهند که $\int g \, d\mu$ حقیقی می‌باشد .

توابع از ردهٔ $\mathscr{L}^2$

حال به عنوان کاربردی از نظریهٔ لبگ ، قضیهٔ پارسوال را (که فقط برای توابع انتگرال ریمان‌دار در فصل ۸ ثابت شد) تعمیم داده قضیهٔ ریس ـ فیشر[1] را برای مجموعه‌های متعامدیکه از توابع اثبات می‌کنیم .

۱۱·۳۴ تعریف . فرض کنیم X یک فضای اندازه‌پذیر باشد . می‌گوییم تابع مختلط $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ بر X هرگاه f اندازه‌پذیر باشد و

$$\int_X |f|^2 \, d\mu < +\infty.$$

چنانچه μ اندازهٔ لبگ باشد ، می‌گوییم $f \in \mathscr{L}^2$. به ازای $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ (از حالا به بعد عبارت "بر X" را حذف خواهیم کرد) تعریف می‌کنیم

$$\|f\| = \left\{ \int_X |f|^2 \, d\mu \right\}^{1/2}$$

و $\|f\|$ را $\mathscr{L}^2(\mu)$-نرم f می‌خوانیم .

---

1. Riesz-Fischer

۳۵۰۱۱ قضیه. فرض کنیم $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ و $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$. دراین صورت ، $fg \in \mathscr{L}(\mu)$ و

$$\int_X |fg|\, d\mu \le \|f\|\, \|g\|. \tag{98}$$

این نامساوی نامساوی شوارتز است که ما قبلا " به آن در مورد سریها و انتگرالهای ریمان برخورده‌ایم . از این نامساوی چنین نتیجه می‌شود :

$$0 \le \int_X (|f| + \lambda|g|)^2\, d\mu = \|f\|^2 + 2\lambda \int_X |fg|\, d\mu + \lambda^2\|g\|^2,$$

که به ازای هر λ ی حقیقی برقرار می‌باشد .

۳۶۰۱۱ قضیه. هرگاه $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ و $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$ ، آنگاه $f + g \in \mathscr{L}^2(\mu)$ و

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|.$$

برهان. نامساوی شوارتز نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= \int |f|^2 + \int f\bar{g} + \int \bar{f}g + \int |g|^2\\ &\le \|f\|^2 + 2\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2\\ &= (\|f\| + \|g\|)^2.\end{aligned}$$

۳۷۰۱۱ تبصره. اگر فاصلهٔ بین دوتابع f و g در $\mathscr{L}^2(\mu)$ رامساوی $\|f-g\|$ تعریف کنیم ، خواهیم دید که شرطهای تعریف ۱۵۰۲ برقرارند جزآنکه $\|f-g\| = 0$ ایجاب نمی‌کند که به ازای هر x ، $f(x) = g(x)$ ، بلکه‌این‌تساوی‌فقط به‌ازای تقریبا "هر x برقرار می‌باشد . لذا، اگر توابعی راکه فقط‌بر مجموعه‌ای‌از اندازهٔ صفربا هم فرق دارند یکی بگیریم ، $\mathscr{L}^2(\mu)$ یک فضای متری خواهد بود .

حال $\mathscr{L}^2$ را بر بازه‌ای از خط حقیقی ، نسبت به اندازهٔ لبگ ، در نظر می‌گیریم .

۳۸۰۱۱ قضیه. توابع پیوسته زیرمجموعهٔ چگالی از $\mathscr{L}^2$ بر $[a, b]$ را تشکیل می‌دهند .

به عبارت صریحتر ، این یعنی که به ازای هر $f \in \mathscr{L}^2$ بر $[a, b]$ و هر $\varepsilon > 0$ ، تابع پیوسته‌ای مانند g بر $[a, b]$ هست بطوری که

$$\|f-g\| = \left\{\int_a^b (f-g)^2\, dx\right\}^{1/2} < \varepsilon.$$

برهان. می‌گوییم f در $\mathscr{L}^2$ به وسیلهٔ دنبالهٔ $\{g_n\}$ تغریب شده است هرگاه وقتی $n \to \infty$، $\|f-g_n\| \to 0$.

فرض‌کنیم A زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $[a, b]$ و K_A تابع مشخص آن باشد. قرار می‌دهیم

$$t(x) = \inf |x-y| \qquad (y \in A)$$

و

$$g_n(x) = \frac{1}{1+nt(x)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

در این صورت، g_n بر $[a, b]$ پیوسته است، $g_n(x) = 1$ بر A، و $g_n(x) \to 0$ بر B که در آن $B = [a, b] - A$. از اینرو، به استناد قضیهٔ ۱۱ ۰ ۳۲،

$$\|g_n - K_A\| = \left\{\int_B g_n^2\, dx\right\}^{1/2} \to 0.$$

پس توابع مشخص مجموعه‌های بسته را می‌توان در $\mathscr{L}^2$ به وسیلهٔ تابعهای پیوسته تقریب کرد.

بنابر (۳۹)، همین مطلب در مورد تابع مشخص هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر، و درنتیجه تابعهای اندازه‌پذیر ساده، صحیح است.

اگر $f \geq 0$ و $f \in \mathscr{L}^2$، $\{s_n\}$ را دنباله‌ای صعودی از توابع اندازه‌پذیر نامنفی و ساده می‌انگاریم بقسمی که $s_n(x) \to f(x)$. چون $|f-s_n|^2 \leq f^2$، قضیهٔ ۱۱ ۰ ۳۲ نشان خواهد داد که $\|f-s_n\| \to 0$.

حال می‌توان حالت کلی را نتیجه گرفت.

۱۱ ۰ ۳۹ تعریف. می‌گوییم دنبالهٔ $\{\phi_n\}$ از توابع مختلط یک مجموعهٔ **متعامدیکه** از توابع بر فضای اندازهٔ X است هرگاه

$$\int_X \phi_n \bar{\phi}_m\, d\mu = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ 1 & (n = m). \end{cases}$$

بخصوص، باید داشته باشیم $\phi_n \in \mathscr{L}^2(\mu)$. اگر $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ و

$$c_n = \int_X f\bar{\phi}_n\, d\mu \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

مثل تعریف ۸ ۰ ۱۰ می‌نویسیم

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n.$$

تعریف سریهای فوریهٔ مثلثاتی به همین نحو به$\mathscr{L}^2$(یا حتی به $\mathscr{L}$) بر$[-\pi, \pi]$تعمیم خواهند یافت. قضایای ۱۱۰۸ و ۱۲۰۸ (نامساوی بسل) به‌ازای هر $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ برقرارند. برهانها، کلمه به کلمه، مثل هم خواهند بود.

حال می‌توان قضیهٔ پارسوال را اثبات کرد.

۴۰۰۱۱ قضیه. فرض کنیم

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{99}$$

که در آن $f \in \mathscr{L}^2$ بر $[-\pi, \pi]$. s_n را مجموع جزئی n م (۹۹) می‌انگاریم. در این صورت،

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0, \tag{100}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\, dx. \tag{101}$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده‌شده‌باشد. بنابرقضیهٔ ۳۸۰۱۱، تابع پیوسته‌ای چون g هست بطوری که

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

علاوه بر این، بـه‌آسانی می‌بینیم که می‌توان طوری ترتیب داد که $g(\pi) = g(-\pi)$. پس g را می‌شودبه‌یک‌تابع پیوستهٔ متناوب تعمیم بخشید. بنابر قضیهٔ ۱۶۰۸، یک‌چندجمله‌ای مثلثاتی مانند T، مثلاً" از درجهٔ N، هست بطوری که

$$\|g - T\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

لذا، بنابر قضیهٔ ۱۱۰۸ (تعمیم یافته به$\mathscr{L}^2$)، $n \geq N$ ایجاب می‌کند که

$$\|s_n - f\| \leq \|T - f\| < \varepsilon,$$

و (۱۰۰) نتیجه می‌شود. معادلهٔ (۱۰۱)، مثل وضعی که در برهان قضیهٔ ۱۶۰۸ بود، از (۱۰۰) به دست خواهد آمد.

نتیجه. هرگاه $f \in \mathscr{L}^2$ **بر** $[-\pi, \pi]$ **و**

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = 0 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

آنگاه $\|f\| = 0$.

لذا ، اگر دو تابع در $\mathscr{L}^2$ یک سری‌فوریه داشته‌باشند ، حداکثر بر مجموعه‌ای از اندازهٔ صفر با هم فرق دارند .

۴۱۰۱۱ تعریف . فرض کنیم $f_n \in \mathscr{L}^2(\mu)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ، f . می‌گوییم $\{f_n\}$ در $\mathscr{L}^2(\mu)$ به f همگراست هرگاه $\|f_n - f\| \to 0$.می‌گوییم $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در $\mathscr{L}^2(\mu)$ است‌هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N باشد بطوری که $n \geq N$ و $m \geq N$ نامساوی $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$ را ایجاب نمایند .

۴۲۰۱۱ قضیه. هرگاه $\{f_n\}$ **یک دنبالهٔ کشی در** $\mathscr{L}^2(\mu)$ **باشد ، تابعی چون** $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ **هست بقسمی که** $\{f_n\}$ **در** $\mathscr{L}^2(\mu)$ **به** f **همگراست .**

به عبارت دیگر ، این قضیه می‌گوید که $\mathscr{L}^2(\mu)$ یک فضای متری **تام** می‌باشد .

برهان . چون $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی است ، می‌توان دنباله‌ای مانند $\{n_k\}$ ، $k = 1, 2, 3, \ldots$ ، چنان یافت که

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

تابعی مثل $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$ را اختیار می‌کنیم . بنابر نامساوی شوارتز ،

$$\int_X |g(f_{n_k} - f_{n_{k+1}})|\,d\mu \leq \frac{\|g\|}{2^k}.$$

لذا ،

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |g(f_{n_k} - f_{n_{k+1}})|\,d\mu \leq \|g\|. \tag{102}$$

بنابر قضیهٔ ۳۰۰۱۱ ، در (۱۰۲) می‌توان جمعبندی وانتگرالگیری را با هم عوض کرد .از این نتیجه خواهد شد که، تقریبا " همه جا بر X ،

$$|g(x)|\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|<+\infty. \tag{103}$$

بنابراین، تقریباً" همه جا بر X،

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|<+\infty; \tag{104}$$

زیرا هرگاه سری مذکور در (۱۰۴) بر مجموعه‌ای چون E با اندازهٔ مثبت واگرا می‌بود، می‌شد $g(x)$ را بر زیرمجموعه‌ای از E با اندازهٔ مثبت ناصفرگرفته بدین ترتیب تناقضی با (۱۰۳) به دست آورد.

ملاحظه می‌کنیم که چون مجموع جزئی k ام سری

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)),$$

که تقریباً" همه جا بر X همگراست، مساوی

$$f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_1}(x)$$

است، معادلهٔ

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)$$

$f(x)$ را تقریباً" به ازای هر $x\in X$ تعریف می‌کند، و اینکه $f(x)$ در بقیهٔ نقاط X چطور تعریف شود اهمیتی نخواهد داشت.

حال نشان می‌دهیم که این f از خواص مطلوب برخوردار است. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده است، و N را همانطور که در تعریف ۴۱۰۱۱ معین شده اختیار می‌کنیم. چنانچه $n_k>N$، قضیهٔ فاتو نشان می‌دهد که

$$\|f-f_{n_k}\|\le\liminf_{i\to\infty}\|f_{n_i}-f_{n_k}\|\le\varepsilon.$$

لذا، $f-f_{n_k}\in\mathscr{L}^2(\mu)$؛ وچون $f=(f-f_{n_k})+f_{n_k}$، خواهیم دیدکه $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$. همچنین، از آنجا که ε دلخواه است،

$$\lim_{k\to\infty}\|f-f_{n_k}\|=0.$$

بالأخره، نامساوی

$$\|f-f_n\|\le\|f-f_{n_k}\|+\|f_{n_k}-f_n\| \tag{105}$$

نشان می‌دهد که $\{f_n\}$ در $\mathscr{L}^2(\mu)$ به f همگراست؛ زیرا هرگاه n و n_k را به قدر کافی بزرگ بگیریم، هر یک از دو جملهٔ سمت راست (۱۰۵) را می‌توان بدلخواه کوچک نمود.

۴۳۰۱۱ قضیهٔ ریس ــ فیشر. فرض کنیم $\{\phi_n\}$ بر X متعامد یکه باشد. $\sum|c_n|^2$ را همگرا انگاشته قرار می‌دهیم $s_n = c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n$. در این صورت، تابعی چون $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ هست بقسمی که $\{s_n\}$ در $\mathscr{L}^2(\mu)$ به f همگراست و

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n.$$

برهان. به ازای $n > m$

$$\|s_n - s_m\|^2 = |c_{m+1}|^2 + \cdots + |c_n|^2.$$

درنتیجه، $\{s_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در $\mathscr{L}^2(\mu)$ است. بنابر قضیهٔ ۴۲۰۱۱، تابعی مانند $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ هست بقسمی که

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0.$$

حال اگر $n > k$،

$$\int_X f\bar{\phi}_k\, d\mu - c_k = \int_X f\bar{\phi}_k\, d\mu - \int_X s_n\bar{\phi}_k\, d\mu.$$

درنتیجه،

$$\left|\int_X f\bar{\phi}_k\, d\mu - c_k\right| \le \|f - s_n\| \cdot \|\phi_k\| + \|f - s_n\|.$$

با فرض $n \to \infty$ ملاحظه می‌کنیم که

$$c_k = \int_X f\bar{\phi}_k\, d\mu \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

و برهان تمام خواهد بود.

۴۴۰۱۱ تعریف. مجموعهٔ متعامد یکهٔ $\{\phi_n\}$ را تام نامند هرگاه، به‌ازای $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$، معادله‌های

$$\int_X f\bar{\phi}_n\, d\mu = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

تساوی $\|f\| = 0$ را ایجاب نمایند.

در نتیجهٔ قضیهٔ ۴۰۰۱۱ تمامیت دستگاه مثلثاتی از معادلهٔ پارسوال (۱۰۱) استنتاج

شد . بعکس، معادلهٔ پارسوال به ازای هر مجموعهٔ متعامد یکهٔ تام برقرار می‌باشد :

۴۵۰۱۱ قضیه. *فرض کنیم* $\{\phi_n\}$ *یک مجموعهٔ متعامدیکهٔ تام باشد . هرگاه* $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ و

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n, \tag{106}$$

آنگاه

$$\int_X |f|^2\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2. \tag{107}$$

برهان. بنابر نامساوی بسل $\Sigma|c_n|^2$ همگراست . اگر قرار دهیم

$$s_n = c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n,$$

قضیهٔ ریس ــ فیشر نشان می‌دهد که تابعی چون $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$ هست بقسمی که

$$g \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n, \tag{108}$$

و $\|g - s_n\| \to 0$. درنتیجه، $\|s_n\| \to \|g\|$. چون

$$\|s_n\|^2 = |c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2,$$

خواهیم داشت

$$\int_X |g|^2\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2. \tag{109}$$

حال (۱۰۶)، (۱۰۸)، و تمامیت $\{\phi_n\}$ نشان می‌دهند که $\|f - g\| = 0$ درنتیجه، (۱۰۹) تساوی (۱۰۷) را ایجاب خواهد کرد .

از تلفیق قضایای ۴۳۰۱۱ و ۴۵۰۱۱ به نتیجهٔ بسیار جالبی می‌رسیم و آن اینکه هر مجموعهٔ متعامدیکهٔ تام تناظر 1-1 ی میان توابعی چون $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ (که‌درآن تابعهایی‌که‌تقریبا " همه‌جا مساویندیکی شده‌اند) ،از یک طرف، و دنباله‌های $\{c_n\}$ که‌برای آنها $\Sigma|c_n|^2$ همگراست ، از طرف دیگر، برقرار می‌کند . نمایش

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n,$$

همراه با معادلهٔ پارسوال، نشان می‌دهد که $\mathscr{L}^2(\mu)$ را می‌توان به منزلهٔ یک فضای اقلیدسی

با بعد نامتناهی (فضای هیلبرت[1]) در نظر گرفت که در آن هر نقطهٔ f دارای مختصات c_n است و تابعهای ϕ_n بردارهای مختصات می‌باشند .

تمرین

۱ . هرگاه $f \geq 0$ و $\int_E f\,d\mu = 0$ ، ثابت کنید تقریبا " همه جا بر E ، $f(x) = 0$. **راهنمایی :** فرض کنید E_n زیرمجموعه‌ای از E باشد که بر آن $f(x) > 1/n$. بنویسید $A = \bigcup E_n$. در این صورت، $\mu(A) = 0$ اگر و فقط اگر به ازای هر n ، $\mu(E_n) = 0$.

۲ . هرگاه به‌ازای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر A از مجموعهٔ اندازه‌پذیر E ، $\int_A f\,d\mu = 0$، آنگاه، تقریبا " همه جا بر E ، $f(x) = 0$.

۳ . هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشد ،ثابت کنید مجموعهٔ نقاطی چون x که در آنها $\{f_n(x)\}$ همگراست اندازه‌پذیر است .

۴ . هرگاه $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E و g بر E کراندار و اندازه‌پذیر باشد ،آنگاه $fg \in \mathscr{L}(\mu)$ بر E.

۵ . قرار می‌دهیم

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}), \\ 1 & (\frac{1}{2} < x \leq 1), \end{cases} \\
f_{2k}(x) &= g(x) \qquad (0 \leq x \leq 1), \\
f_{2k+1}(x) &= g(1-x) \qquad (0 \leq x \leq 1).
\end{aligned}
$$

نشان دهید که

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 \leq x \leq 1),$$

ولی

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \tfrac{1}{2}.$$

[قس. (۷۷) .]

۶ . فرض کنید

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (|x| \leq n), \\ 0 & (|x| > n). \end{cases}$$

---

1. Hilbert

در این صورت ، $f_n(x) \to 0$ به طور یکنواخت بر R^1 ، ولی

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n\,dx = 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

(به جای $\int_{R^1}$ می‌نویسیم $\int_{-\infty}^{\infty}$.) پس همگرایی یکنواخت همگرایی تسلطی به معنی قضیهٔ ۱۱۰۳۲ را ایجاب نمی‌کند . لکن ، بر مجموعه‌های با اندازهٔ متناهی ، دنباله‌های به طور یکنواخت همگرا از توابع کراندار در قضیهٔ ۱۱۰۳۲ صدق خواهند کرد .

۷ . شرطی بیابید لازم و کافی که تحت آن $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$. **راهنمایی:** مثال ۱۱۰۶ (ب) و قضیهٔ ۱۱۰۳۳ را در نظر بگیرید .

۸ . هرگاه $f \in \mathscr{R}$ بر $[a, b]$ و $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ، ثابت کنید تقریبا "همه‌جا بر $[a, b]$ $F'(x) = f(x)$.

۹ . ثابت کنید تابع F داده شده با (۹۶) بر $[a, b]$ پیوسته است .

۱۰ . هرگاه $\mu(X) < +\infty$ و $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ بر X ، ثابت کنید $f \in \mathscr{L}(\mu)$ بر X . این مطلب در صورتی که

$$\mu(X) = +\infty$$

درست نیست . به عنوان مثال ، هرگاه

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|}$$ و

آنگاه $f \in \mathscr{L}^2$ بر R^1 ، اما $f \notin \mathscr{L}$ بر R^1 .

۱۱ . هرگاه $f, g \in \mathscr{L}(\mu)$ بر X ، فاصلهٔ بین f و g را با

$$\int_X |f - g|\,d\mu$$

تعریف کنید . ثابت کنید که $\mathscr{L}(\mu)$ یک فضای متری تام است .

۱۲ . فرض کنید

(آ) اگر $0 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 1$ ، $|f(x, y)| \le 1$ ؛
(ب) $f(x, y)$ ، به ازای x ثابت ، تابع پیوسته‌ای از y باشد ؛
(پ) $f(x, y)$ ، به ازای y ثابت ، تابع پیوسته‌ای از x باشد .

قرار دهید

$$g(x) = \int_0^1 f(x, y)\,dy \qquad (0 \le x \le 1).$$

آیا $\mathscr{G}$ پیوسته است ؟

۱۳ . تابعهای

$$f_n(x) = \sin nx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, -\pi \leq x \leq \pi)$$

را نقاطی از $\mathscr{L}^2$ بگیرید . ثابت کنید مجموعهٔ این نقاط بسته و کراندار است اما فشرده نمی‌باشد .

۱۴ . ثابت کنید تابع مختلط f اندازه پذیر است اگر و فقط اگر $f^{-1}(V)$ به ازای هر مجموعهٔ باز V در صفحه اندازه پذیر باشد .

۱۵ . فرض کنید $\mathscr{R}$ حلقهٔ تمام زیرمجموعه‌های مقدماتی $(0, 1]$ باشد . هرگاه $0 < a \leq b \leq 1$، تعریف کنید

$$\phi([a, b]) = \phi([a, b)) = \phi((a, b]) = \phi((a, b)) = b - a;$$

ولی ، اگر $0 < b \leq 1$ تعریف کنید

$$\phi((0, b)) = \phi((0, b]) = 1 + b.$$

نشان دهید که این روابط تابع مجموعه‌ای جمعپذیر ϕ بر $\mathscr{R}$ را به ما می‌دهد که منتظم نیست و قابل تعمیم به یک تابع مجموعه‌ای بـه طور شمارشپذیر جمعپذیر بر یک σ ـ حلقه نمی‌باشد .

۱۶ . فرض کنید $\{n_k\}$ یک دنبالهٔ صعودی از اعداد صحیح مثبت ، و E مجموعهٔ تمام x هایی در $(-\pi, \pi)$ باشد که در آنها $\{\sin n_k x\}$ همگراست . ثابت کنید $m(E) = 0$. **راهنمایی :** به ازای هر $A \subset E$

$$\int_A \sin n_k x \, dx \to 0$$

و

وقتی $k \to \infty$ ، $2\int_A (\sin n_k x)^2 \, dx = \int_A (1 - \cos 2n_k x) \, dx \to m(A)$.

۱۷ . فرض کنید $E \subset (-\pi, \pi)$ ، $m(E) > 0$ و $\delta > 0$. با استفاده از نامساوی بسل ثابت کنید که که حداکثر تعدادی متناهی عدد صحیح مانند n هست که به ازای هر $x \in E$ ، $\sin nx \geq \delta$.

۱۸ . فرض کنید $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ ، $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$. ثابت کنید

$$\left|\int f\bar{g} \, d\mu\right|^2 = \int |f|^2 \, d\mu \int |g|^2 \, d\mu$$

اگر و فقط اگر عدد ثابتی چون c باشد بقسمی که تقریبا " همه جا $g(x) = cf(x)$.
(قس. قضیهٔ ۱۱ ۰۳۵۰)

کتابنامه

ARTIN, E.: "The Gamma Function," Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1964.

BOAS, R. P.: "A Primer of Real Functions," Carus Mathematical Monograph No. 13, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.

BUCK, R. C. (ed.): "Studies in Modern Analysis," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.

———: "Advanced Calculus," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.

BURKILL, J. C.: "The Lebesgue Integral," Cambridge University Press, New York, 1951.

DIEUDONNÉ, J.: "Foundations of Modern Analysis," Academic Press, Inc., New York, 1960.

FLEMING, W. H.: "Functions of Several Variables," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.

GRAVES, L. M.: "The Theory of Functions of Real Variables," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.

HALMOS, P. R.: "Measure Theory," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1950.

———: "Finite-dimensional Vector Spaces," 2d ed., D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1958.

HARDY, G. H.: "Pure Mathematics," 9th ed., Cambridge University Press, New York, 1947.

——— and ROGOSINSKI, W.: "Fourier Series," 2d ed., Cambridge University Press, New York, 1950.

HERSTEIN, I. N.: "Topics in Algebra," Blaisdell Publishing Company, New York, 1964.

HEWITT, E., and STROMBERG, K.: "Real and Abstract Analysis," Springer Publishing Co., Inc., New York, 1965.

KELLOGG, O. D.: "Foundations of Potential Theory," Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1940.

KNOPP, K.: "Theory and Application of Infinite Series," Blackie & Son, Ltd., Glasgow, 1928.

LANDAU, E. G. H.: "Foundations of Analysis," Chelsea Publishing Company, New York, 1951.

MCSHANE, E. J.: "Integration," Princeton University Press, Princeton, N.J., 1944.

NIVEN, I. M.: "Irrational Numbers," Carus Mathematical Monograph No. 11, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1956.

ROYDEN, H. L.: "Real Analysis," The Macmillan Company, New York, 1963.

RUDIN, W.: "Real and Complex Analysis," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.

SIMMONS, G. F.: "Topology and Modern Analysis," McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

SINGER, I. M., and THORPE, J. A.: "Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry," Scott, Foresman and Company, Glenview, Ill., 1967.

SMITH, K. T.: "Primer of Modern Analysis," Bogden and Quigley, Tarrytown-on-Hudson, N.Y., 1971.

SPIVAK, M.: "Calculus on Manifolds," W. A. Benjamin, Inc., New York, 1965.

THURSTON, H. A.: "The Number System," Blackie & Son, Ltd., London-Glasgow, 1956.

فهرست علامات خاص

در جلوعلامات زیر، معنی آنها به اختصار و همچنین شمارهٔ صفحه‌ای که در آن تعریف شده‌اند ذکر شده است.

واژه نامه
فارسی به انگلیسی

آزمون	test
انتگرال	integral
تراکم کشی	Cauchy's condensation
ریشه	root
مقایسه‌ای	comparison
نسبت	ratio
اجتماع	union
اشتراک	intersection
اصل موضوع	axiom
افراز	partition
واحد	of unity
انتگرال	integral
بالایی	upper
پایینی	lower
خط	line
مجازی	improper
انتگرالگیری	integration
به طریقهٔ جزء به جزء	by parts

measure	اندازه
outer	خارجی
zero	صفر
contraction	انقباض
infimum	اینفیمم
interval	بازه
parameter	پارامتری
half-open	نیمباز
remainder	باقیمانده
into	بتو
range	برد
vector	بردار
null	پوچ
column	ستونی
normal	قائم
tangent	مماس
unit	یکه
onto	برو
cut	بریدگی
greatest lower bound	بزرگترین کران پایینی
closure	بست
uniform	یکنواخت
dimension	بعد
infinity	بی نهایت
base	پایه
countable	شمارشپذیر
basis	پایه

متعارف	standard
پوشش	cover
باز	open
پیما	span
پیوستگی	continuity
یکنواخت	uniform
تابع	function
اندازه‌پذیر	measurable
برداری	vector-valued
برل ـ اندازه‌پذیر	Borel-measurable
به طور پیوسته مشتقپذیر	continuously differentiable
به طور یکنواخت پیوسته	uniformly continuous
به طور یکنواخت مشتقپذیر	uniformly differentiable
پله‌ای	step
پیوسته	continuous
از چپ	from left
از راست	from right
توافقی	harmonic
ثابت	constant
حدی	limit
خطی	linear
ریمان ـ انتگرالپذیر	Riemann-integrable
زتا	zeta
ساده	simple
صعودی	increasing
قدر مطلق	absolute value
کراندار	bounded
گاما	gamma

گویا	rational
لبگ ـ انتگرالپذیر	Lebesgue-integrable
لگاریتمی	logarithmic
متعامد	orthogonal
متناوب	periodic
مثلثاتی	trigonometric
مجموعپذیر	summable
مجموعه‌ای	set
محدب	convex
مختصی	coordinate
مشتقپذیر	differentiable
مشخص	characteristic
معکوس	inverse
منتظم	regular
نزولی	decreasing
نمایی	exponential
یک به یک	one-to-one
یکنوا	monotonic
تاو	curl
تبدیل	transformation
خطی	linear
معکوسپذیر	invertible
تتمیم	completion
تجدید آرایش	rearrangement
تحدید	restriction
ترتیب	order
قاموسی	lexicographic
ترکیب	composition
خطی	linear

projection	تصویر
refinement	تظریف
common	مشترک
transitivity	تعدی
change of variable	تغییر متغیر
symmetric difference	تفاضل متقارن
almost everywhere	تقریبا" همه جا
mean square approximation	تقریب میانگین مربعی
support	تکیه‌گاه
one-to-one correspondence	تناظر یک به یک
extension	توسیع
Euler's constant	ثابت اویلر
algebra	جبر
uniformly closed	به طور یکنواخت بسته
self-adjoint	خود الحاقی
addition	جمع
summation by parts	جمعبندی به طریقهٔ جزء به جزء
additivity	جمعپذیری
countable	شمارشپذیر
orientation	جهت
positive	مثبت
negative	منفی
torus	چنبره
polynomial	چند جمله‌ای
product	حاصل ضرب (ضرب)

اسکالر	scalar
داخلی	inner
حجره	cell
حجم	volume
حد	limit
بالایی	upper
پایینی	lower
زیر دنباله‌ای	subsequential
سمت چپ	left-hand
سمت راست	right-hand
نقطه به نقطه	pointwise
حلقه	ring
خاصیت انعکاسی	reflexive property
خانواده	family
خط	line
حقیقی	real
دایره	circle
همگرایی	of convergence
دترمینان	determinant
درون	interior
دستگاه وسعت یافتهٔ اعداد حقیقی	extended real number system
دنباله	sequence
به طور یکنواخت کراندار	uniformly bounded
به طور یکنواخت همگرا	uniformly convergent
صعودی	increasing
کراندار	bounded
مضاعف	double

نقطه به نقطه کراندار	pointwise bounded
نقطه به نقطه همگرا	pointwise convergent
واگرا	divergent
همگرا	convergent
یکنوا	monotonic
دیفرانسیل	differential
دیورژانس	divergence
رابطهٔ هم‌ارزی	equivalence relation
رتبه	rank
ریشه	root
دوم	square
زاویهٔ فضایی	solid angle
زنجیر	chain
مستوی	affine
مشتقپذیر	differentiable
زیرپوشش	subcover
زیرجمعپذیری	subadditivity
زیردنباله	subsequence
زیرمجموعه	subset
چگال	dense
حقیقی	proper
زیرمیدان	subfield
ژاکوبی	jacobian
سادک	simplex
جهتدار	oriented

standard	متعارف
affine	مستوی
differentiable	مشتقپذیر
series	سری
absolutely convergent	به طور مطلق همگرا
power	توانی
binomial	دو جملهای
alternating	متناوب
infinite	نامتناهی
divergent	واگرا
convergent	همگرا
geometric	هندسی
surface	سطح
supremum	سوپرمم
$\mathscr{C}''$-equivalence	$\mathscr{C}''$-معادل
σ-ring	σ-حلقه
index	شاخص (اندیس)
increasing	صعودی
radius	شعاع
of convergence	همگرایی
plane	صفحه
complex	مختلط
tangent	مماس
multiplication	ضرب
flip	ضربه

length	طول
number	عدد
cardinal	اصلی
decimal	اعشاری
algebraic	جبری
real	حقیقی
winding	گردشی
irrational	گنگ
rational	گویا
finite	متناهی
positive	مثبت
complex	مختلط
negative	منفی
nonnegative	نامنفی
operator	عملگر
linear	خطی
identity	همانی
area element	عنصر سطح
distance	فاصله
diagonal process	فرایند قطری
form	فرم
of class $\mathscr{C}', \mathscr{C}''$	از ردهٔ $\mathscr{C}'$، $\mathscr{C}''$
basic	اساسی
closed	بسته
differential	دیفرانسیل
exact	کامل
formula	فرمول

space	فضا
euclidean	اقلیدسی
measure	اندازه
measurable	اندازه‌پذیر
vector	برداری
null	پوچ
separable	جدایی پذیر
metric	متری
complete	تام
compact	فشرده
normal	نرمال
connected	همبند
rule	قاعده
anticommutative	پادتعویضپذیری
distributive	پخشپذیری
commutative	تعویضپذیری
chain	زنجیره‌ای
associative	شرکتپذیری
absolute value	قدر مطلق
part	قسمت
real	حقیقی
imaginary	موهومی
theorem	قضیه
implicit function	تابع ضمنی
inverse function	تابع معکوس
divergence	دیورژانس
mean value	مقدار میانگین
intermediate value	مقدار میانی

موضعی سازی	localization
وجودی	existence
همگرایی تسلطی	dominated convergence
همگرایی یکنوا	monotone convergence
یکتایی	uniqueness
قطر	diameter
قطعه	segment
قلمرو	domain
پارامتری	parameter
قوس	arc
کران	bound
بالایی	upper
پایینی	lower
کرانداری یکنواخت	uniform boundedness
کرانه	boundary
کره	sphere
کوچکترین کران بالایی	least upper bound
خاصیت	property
گرادیان	gradient
گردآیه	collection
گوی	ball
لاپلاسین	laplacian
لگاریتم	logarithm
ماتریس	matrix
	column

row	سطری
maximum	ماکزیمم
local	موضعی
origin	مبداء
variable	متغیر
of integration	انتگرالگیری
complement	متمم
sum	مجموع
partial	جزئی
set	مجموعه
bounded above	از بالا کراندار
measurable	اندازه‌پذیر
disjoit	ازهم جدا
separated	ازهم جدا شده
open	باز
closed	بسته
empty	تهی
dense	چگال
at most countable	حداکثر شمارشپذیر
countable	شمارشپذیر
uncountable	شمارش ناپذیر
zero	صفر
compact	فشرده
perfect	کامل
bounded	کراندار
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد یکه
finite	متناهی
convex	محدب

مستقل	independent
مقدماتی	elementary
ناتهی	nonempty
نامتناهی	infinite
نامستقل	dependent
نسبتا" باز	relatively open
همبند	connected
محک	criterion
مختصات	coordinates
مزدوج	conjugate
مسئله با مقدار اولیه	initial-value problem
مشتق	derivative
جزئی	partial
جهتی	directional
قائم	normal
کلی	total
مراتب بالاتر	higher-order
مشتقگیری	differentiation
معادلهٔ دیفرانسیل	differential equation
معکوس	inverse
نقش	image
مقدار	value
میانی	intermediate
مکعب	cube
یکه	unit
منحنی	curve
با طول متناهی	rectifiable
بسته	closed
به طور پیوسته مشتقپذیر	continuously differentiable

فضا پرکن	space-filling
موءلفه	component
مماسی	tangential
میانگین حسابی	arithmetic mean
میدان	field
برداری	vector
حقیقی	real
مختلط	complex
مرتب	ordered
مینیمم	minimum
ناپیوستگی	discontinuity
ساده	simple
نامساوی	inequality
مثلثی	triangle
نرم	norm
سوپرمم	supremum
نقش	image
معکوس	inverse
نقطه	point
تراکم	condensation
تنها	isolated
ثابت	fixed
حدی	limit
درونی	interior
زینی	saddle
نگاشت	mapping
اولیه	primitive
باز	open

به طور پیوسته مشتقپذیر	continuously differentiable
به طور یکنواخت پیوسته	uniformly continuous
پیوسته	continuous
خطی	linear
مستوی	affine
معکوس	inverse
یک به یک موضعی	locally one-to-one
نمایش متعارف	standard presentation
نمودار	graph
نوار موبیوس	Mobius band
هسته	kernel
همپیوستگی	equicontinuity
همسایگی	neighborhood
همگرایی	convergence
تسلطی	dominated
مطلق	absolute
نقطه به نقطه	pointwise
یکنواخت	uniform
یکریختی	isomorphism
یکمتری	isometry

واژه‌نامه

انگلیسی به فارسی

absolute value	قدر مطلق
addition	جمع
additivity	جمعپذیری
countable	شمارشپذیر
algebra	جبر
self-adjoint	خود الحاقی
uniformly closed	به طور یکنواخت بسته
almost everywhere	تقریبا" همه جا
arc	قوس
area element	عنصر سطح
arithmetic mean	میانگین حسابی
axiom	اصل موضوع
ball	گوی
base	پایه
countable	شمارشپذیر
basis	پایه
standard	متعارف
bound	کران

lower	پایینی
upper	بالایی
boundary	کرانه
cell	حجره
chain	زنجیر
affine	مستوی
differentiable	مشتقپذیر
change of variable	تغییر متغیر
$\mathscr{C}''$-equivalence	$\mathscr{C}''$-معادل
circle	دایره
of convergence	همگرایی
closure	بست
uniform	یکنواخت
collection	گردآیه
complement	متمم
completion	تتمیم
component	موءلفه
tangential	مماسی
composition	ترکیب
linear	خطی
conjugate	مزدوج
continuity	پیوستگی
uniform	یکنواخت
contraction	انقباض
convergence	همگرایی
absolute	مطلق
dominated	تسلطی
pointwise	نقطه به نقطه

uniform	یکنواخت
coordinates	مختصات
cover	پوشش
open	باز
criterion	محک
Cauchy's	کشی
curl	تاو
curve	منحنی
closed	بسته
continuously differentiable	به طور پیوسته مشتقپذیر
rectifiable	با طول متناهی
space-filling	فضا پرکن
cut	بریدگی
derivative	مشتق
directional	جهتی
higher-order	مراتب بالاتر
normal	قائم
partial	جزئی
total	کلی
diagonal process	فرایند قطری
diameter	قطر
differential	دیفرانسیل
equation	معادلهٔ
differentiation	مشتقگیری
dimension	بعد
discontinuity	ناپیوستگی
simple	ساده
distance	فاصله

divergence	دیورژانس
domain	قلمرو
parameter	پارامتری
equicontinuity	همپیوستگی
equivalence relation	رابطهٔ هم ارزی
Euler's constant	ثابت اویلر
extended real number system	دستگاه وسعت یافتهٔ اعداد حقیقی
extension	توسیع
family	خانواده
field	میدان
complex	مختلط
ordered	مرتب
real	حقیقی
vector	برداری
flip	ضربه
form	فرم
basic	اساسی
closed	بسته
differential	دیفرانسیل
exact	کامل
of class $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$	از ردهٔ $\mathscr{C}'$، $\mathscr{C}''$
formula	فرمول
function	تابع
absolute value	قدر مطلق
Borel-measurable	برل ـ اندازه پذیر
bounded	کراندار
characteristic	مشخص

constant	ثابت
continuous	پیوسته
from left	از چپ
from right	از راست
continuously differentiable	به طور پیوسته مشتقپذیر
convex	محدب
coordinate	مختصی
decreasing	نزولی
exponential	نمایی
gamma	گاما
harmonic	توافقی
inverse	معکوس
Lebesgue-integrable	لبگ ــ انتگرالپذیر
limit	حدی
linear	خطی
logarithmic	لگاریتمی
measurable	اندازه‌پذیر
monotonic	یکنوا
one-to-one	یک به یک
orthogonal	متعامد
periodic	متناوب
rational	گویا
regular	منتظم
Riemann-integrable	ریمان ــ انتگرالپذیر
set	مجموعه‌ای
simple	ساده
step	پله‌ای
summable	مجموعپذیر
trigonometric	مثلثاتی

uniformly continuous	به طور یکنواخت پیوسته
uniformly differentiable	به طور یکنواخت مشتقپذیر
vector-valued	برداری
gradient	گرادیان
graph	نمودار
greatest lower bound	بزرگترین کران پایینی
image	نقش
inverse	معکوس
index	شاخص (اندیس)
increasing	صعودی
inequality	نامساوی
triangle	مثلثی
infimum	اینفیمم
infinity	بی نهایت
initial-value problem	مسئله با مقدار اولیه
integral	انتگرال
improper	مجازی
line	خط
lower	پایینی
upper	بالایی
integration	انتگرالگیری
by parts	به طریقهٔ جزء به جزء
interior	درون
intersection	اشتراک
interval	بازه
parameter	پارامتری
half-open	نیمباز

into	بتو
inverse	معکوس
image	نقش
isometry	یکمتری
isomorphism	یکریختی
jacobian	ژاکوبی
kernel	هسته
laplacian	لاپلاسین
least upper bound	کوچکترین کران بالایی
property	خاصیت
length	طول
limit	حد
left-hand	سمت چپ
lower	پایینی
pointwise	نقطه به نقطه
right-hand	سمت راست
subsequential	زیردنباله‌ای
upper	بالایی
line	خط
real	حقیقی
logarithm	لگاریتم
mapping	نگاشت
affine	مستوی
continuous	پیوسته
continuously differentiable	به طور پیوسته مشتقپذیر

inverse	معکوس
linear	خطی
locally one-to-one	یک به یک موضعی
open	باز
primitive	اولیه
uniformly continuous	به طور یکنواخت پیوسته
matrix	ماتریس
column	ستونی
row	سطری
maximum	ماکزیمم
local	موضعی
mean square approximation	تقریب میانگین مربعی
measure	اندازه
outer	خارجی
zero	صفر
minimum	مینیمم
Möbius band	نوار موبیوس
multiplication	ضرب
neighborhood	همسایگی
norm	نرم
supremum	سوپرمم
number	عدد
algebraic	جبری
cardinal	اصلی
complex	مختلط
decimal	اعشاری
finite	متناهی
irrational	گنگ

negative	منفی
nonnegative	نامنفی
positive	مثبت
real	حقیقی
winding	گردشی
one-to-one correspondence	تناظر یک به یک
onto	برو
operator	عملگر
identity	همانی
linear	خطی
order	ترتیب
lexicographic	قاموسی
orientation	جهت
negative	منفی
positive	مثبت
origin	مبداء
part	قسمت
imaginary	موهومی
real	حقیقی
partition	فراز
or unity	واحد
plane	صفحه
complex	مختلط
tangent	مماس
point	نقطه
condensation	تراکم
fixed	ثابت

interior	درونی
isolated	تنها
limit	حدی
saddle	زینی
polynomial	چند جمله‌ای
product	حاصل ضرب (ضرب)
inner	داخلی
scalar	اسکالر
projection	تصویر
radius	شعاع
of convergence	همگرایی
range	برد
rank	رتبه
rearrangement	تجدید آرایش
refinement	تظریف
common	مشترک
reflexive property	خاصیت انعکاسی
remainder	باقیمانده
restriction	تحدید
ring	حلقه
root	ریشه
square	دوم
rule	قاعده
anticommutative	پادتعویضپذیری
associative	شرکتپذیری
chain	زنجیره‌ای
commutative	تعویضپذیری
distributive	پخشپذیری

segment — قطعه
sequence — دنباله
 bounded — کراندار
 convergent — همگرا
 divergent — واگرا
 double — مضاعف
 increasing — صعودی
 monotonic — یکنوا
 pointwise bounded — نقطه به نقطه کراندار
 pointwise convergent — نقطه به نقطه همگرا
 uniformly bounded — به طور یکنواخت کراندار
 uniformly convergent — به طور یکنواخت همگرا
series — سری
 absolutely convergent — به طور مطلق همگرا
 alternating — متناوب
 binomial — دوجمله‌ای
 convergent — همگرا
 divergent — واگرا
 geometric — هندسی
 infinite — نامتناهی
 power — توانی
set — مجموعه
 atmost countable — حداکثر شمارشپذیر
 bounded — کراندار
  above — از بالا
 closed — بسته
 compact — فشرده
 connected — همبند
 convex — محدب

countable	شمارشپذیر
dense	چگال
dependent	نامستقل
disjoint	از هم جدا
elementary	مقدماتی
empty	تهی
finite	متناهی
independent	مستقل
measurable	اندازهپذیر
nonempty	ناتهی
open	باز
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد یکه
perfect	کامل
relatively open	نسبتاً باز
separated	از هم جدا شده
zero	صفر
σ-ring	σ-حلقه
simplex	سادک
affine	مستوی
differentiable	مشتقپذیر
oriented	جهتدار
standard	متعارف
solid angle	زاویهٔ فضایی
space	فضا
connected	همبند
euclidean	اقلیدسی
measurable	اندازهپذیر
measure	اندازه

metric	متری
compact	فشرده
complete	تام
normal	نرمال
null	پوچ
separable	جدایی پذیر
vector	برداری
span	پیما
sphere	کره
standard presentation	نمایش متعارف
subadditivity	زیرجمعپذیری
subcover	زیرپوشش
subfield	زیرمیدان
subsequence	زیر دنباله
subset	زیر مجموعه
dense	چگال
proper	حقیقی
sum	مجموع
partial	جزئی
summation by parts	جمعبندی به طریقهٔ جزء به جزء
support	تکیه‌گاه
supremum	سوپرمم
surface	سطح
symmetric difference	تفاضل متقارن
test	آزمون
Cauchy's condensation	تراکم کشی
comparison	مقایسه‌ای
integral	انتگرال

ratio	نسبت
root	ریشه
theorem	قضیه
divergence	دیورژانس
dominated convergence	همگرایی تسلطی
existence	وجودی
implicit function	تابع ضمنی
intermediate value	مقدار میانی
inverse function	تابع معکوس
localization	موضعی سازی
mean value	مقدار میانگین
monotone convergence	همگرایی یکنوا
uniqueness	یکتایی
torus	چنبره
transformation	تبدیل
invertible	معکوسپذیر
linear	خطی
transitivity	تعدی
uniform boundedness	کرانداری یکنواخت
union	اجتماع
unit	یکه
cube	مکعب
value	مقدار
intermediate	میانی
variable	متغیر
of integration	انتگرالگیری
vector	بردار

column	ستونی
normal	قائم
null	پوچ
tangent	مماس
unit	یکه
volume	حجم

فهرست راهنما